Εργαστηριακή Άσκηση 6

Υπολογισμός της σταθεράς ελατηρίου

Βαρσάμης Χρήστος

- Στόχος: Υπολογισμός της σταθεράς ελατηρίου, k.
- Πειραματική διάταξη: Κατακόρυφο ελατήριο, σειρά πλακιδίων μάζας m.
- Μέθοδος: α) Εφαρμογή του νόμου του Hooke, και β) αξιοποίηση της εξάρτησης της περιόδου, T, ελατηρίου μάζας $m_{ελ}$ με αναρτημένη μάζα m, μέσω της σχέσης $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m + \dfrac{m_{ελ}}{3}}{k}}$.

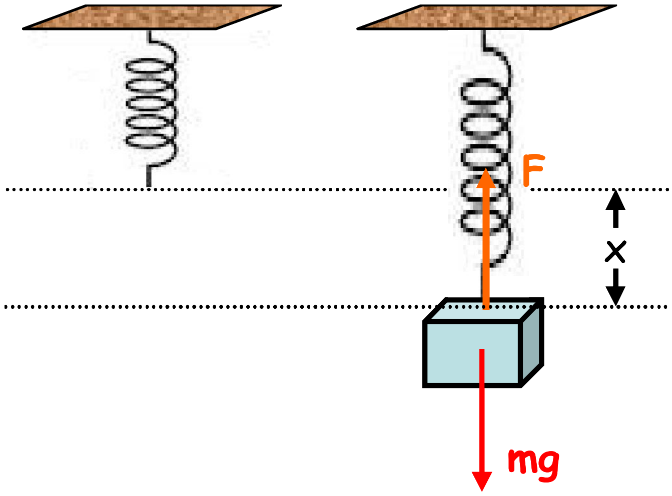
I. Απαραίτητες θεωρητικές γνώσεις

1. Ελαστικότητα και νόμος του Hooke

Όταν ασκήσουμε μια δύναμη σε ένα αντικείμενο τότε αυτό παραμορφώνεται. Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις όπου τα παραμορφωμένα αντικείμενα ανακτούν πολύ γρήγορα το αρχικό τους σχήμα, μια φυσική ιδιότητα που ονομάζεται ελαστικότητα. Η ελαστική περιοχή χαρακτηρίζεται από μια γραμμική σχέση μεταξύ της τάσης που ασκείται σε ένα σώμα και της αντίστοιχης καταπόνησης που προκαλείται σε αυτό, η οποία σχέση είναι γνωστή ως νόμος του Hooke. Η εφαρμογή του νόμου σε ένα ελατήριο οδηγεί στη μαθηματική σχέση:

$$F = -kx \qquad (1)$$

όπου x είναι η μετατόπιση του άκρου του ελατηρίου από την αρχική θέση ισορροπίας του, F είναι η δύναμη επαναφοράς που ασκείται από το ελατήριο στο συγκεκριμένο άκρο και k μια σταθερά γνωστή ως σταθερά ελατηρίου.



***Σχήμα 1**: Ο νόμος του Hooke για ελατήριο.*

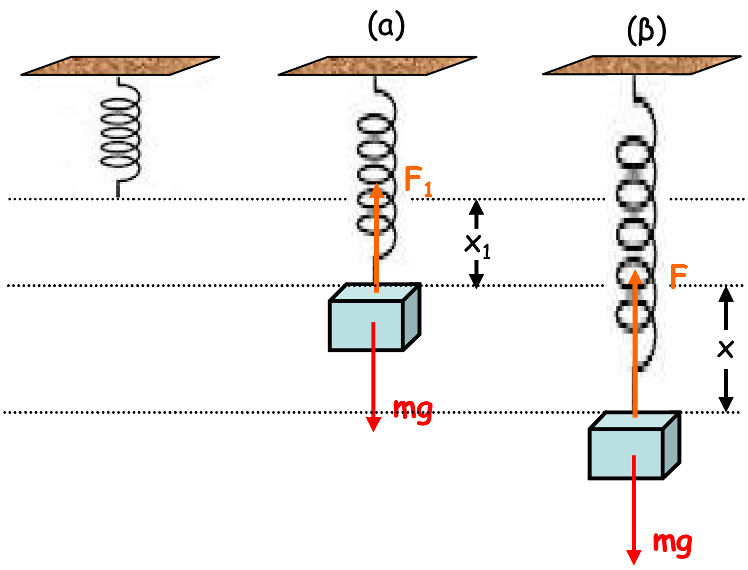
Σχόλιο: Προσέξτε στη σχέση (1) την εμφάνιση του αρνητικού προσήμου. Αυτό συμβαίνει διότι η δύναμη επαναφοράς έχει πάντοτε αντίθετη φορά από εκείνη της αντίστοιχης μετατόπισης.

Εφαρμόζοντας διαστατική ανάλυση, αφού στο SI η μετατόπιση x μετράται σε m και η δύναμη F σε N (ή Kg m s^{-2}), έπεται ότι η σταθερά ελατηρίου έχει μονάδες N/m (ή ισοδύναμα Kg s^{-2}).

2. Απλή αρμονική ταλάντωση κατακόρυφου ελατηρίου με αναρτημένη μάζα

Θεωρούμε το σύστημα του Σχήματος 1, όπου σώμα μάζας m αναρτάται στο ελεύθερο άκρο ενός ιδανικού (δηλαδή με αμελητέα μάζα) κατακόρυφου ελατηρίου. Έστω x_1 η μετατόπιση του άκρου του ελατηρίου από την αρχική του θέση όταν το σύστημα μάζας - ελατηρίου ισορροπεί (βλ. Σχήμα 2α). Από το νόμο του Hooke θα ισχύει $F_1 = -kx_1$ και επιπλέον στη θέση ισορροπίας θα έχουμε ότι:

$$mg = F_1 \Rightarrow mg = -kx_1 \qquad (2)$$



***Σχήμα 2**: Απλή αρμονική ταλάντωση ελατηρίου*

Αν τώρα τεντώσουμε περαιτέρω το ελατήριο κατά την απόσταση x (βλ. Σχήμα 2β), οπότε από το νόμο του Hooke $F = -k(x_1 + x)$, και αφήσουμε το σύστημα ελεύθερο, ο νόμος της δυναμικής για τη μάζα m δίνει:

$$F - mg = ma \Rightarrow -k(x_1 + x) - mg = ma \qquad (3)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2) και (3) καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$-kx = ma \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \qquad (4)$$

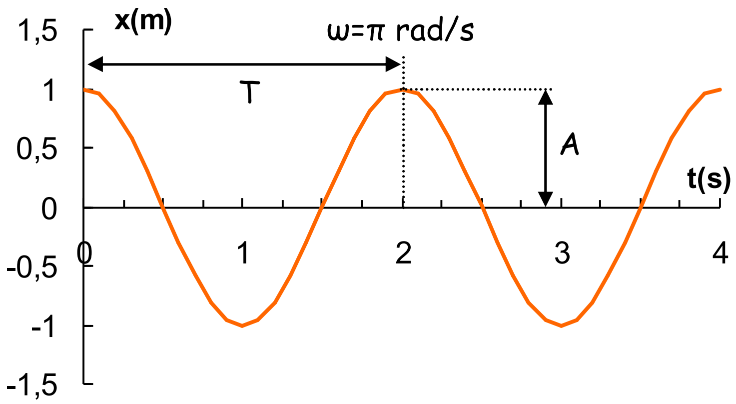
Η παραπάνω εξίσωση, γνωστή ως διαφορική εξίσωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης, έχει ως γενική λύση τη συνάρτηση:

$$x(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t = A\cos(\omega t - \varphi) \qquad (5)$$

όπου c_1 και c_2 σταθερές που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος, ω η κυκλική συχνότητα, A το πλάτος της ταλάντωσης (μέγιστη θέση απομάκρυνσης από εκείνη της ισορροπίας) και φ η αρχική φάση. Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\omega = \sqrt{k/m}, \; A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \; \tan\varphi = c_2 / c_1 \qquad (6)$$

Η εξάρτηση της θέσης x από το χρόνο, x(t), απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα όπου αναφέρονται τα χαρακτηριστικά μεγέθη της ταλάντωσης, πλάτος, A, και κυκλική συχνότητα, ω. Επίσης έχει επιλεγεί η αρχική φάση φ=0.



***Σχήμα 3**: Εξάρτηση της θέσης από το χρόνο, x(t), στην απλή αρμονική ταλάντωση.*

Είναι φανερό ότι το σώμα εκτελεί περιοδική κίνηση με την θέση του να μεταβάλλεται συνεχώς μεταξύ των τιμών -1 και 1 m από τη θέση ισορροπίας. Η κίνηση αυτή ονομάζεται απλή αρμονική ταλάντωση.

Συνεχίζουμε με την έκφραση για την περίοδο T της ταλάντωσης σε σχέση με την κυκλική συχνότητα, ω. Αφού η κίνηση είναι περιοδική, στο χρόνο μιας περιόδου θα έχουμε ότι:

$$x(t+T) = x(t) \Rightarrow A\cos\big(\omega(t+T)\big) = A\cos\omega t \Rightarrow \omega(t+T) = 2\pi + \omega t \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (7)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (6) και (7) καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (8)$$

<u>Σημείωση:</u> Θα μπορούσε κανείς να σταματήσει στην εξίσωση (8) και αφού τη διαμορφώσει σε γραμμική σχέση να υπολογίσει τη σταθερά του ελατηρίου k, έχοντας τον κατάλληλο πίνακα μετρήσεων για τα μεγέθη T και m.

Θυμηθείτε όμως ότι για να φθάσουμε στην (8) θεωρήσαμε τη μάζα του ελατηρίου αμελητέα. Στην πράξη όμως, η μάζα του ελατηρίου δεν είναι αμελητέα, αντιθέτως όπως θα διαπιστώσετε είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τις μάζες που θα χρησιμοποιηθούν στο πείραμα.

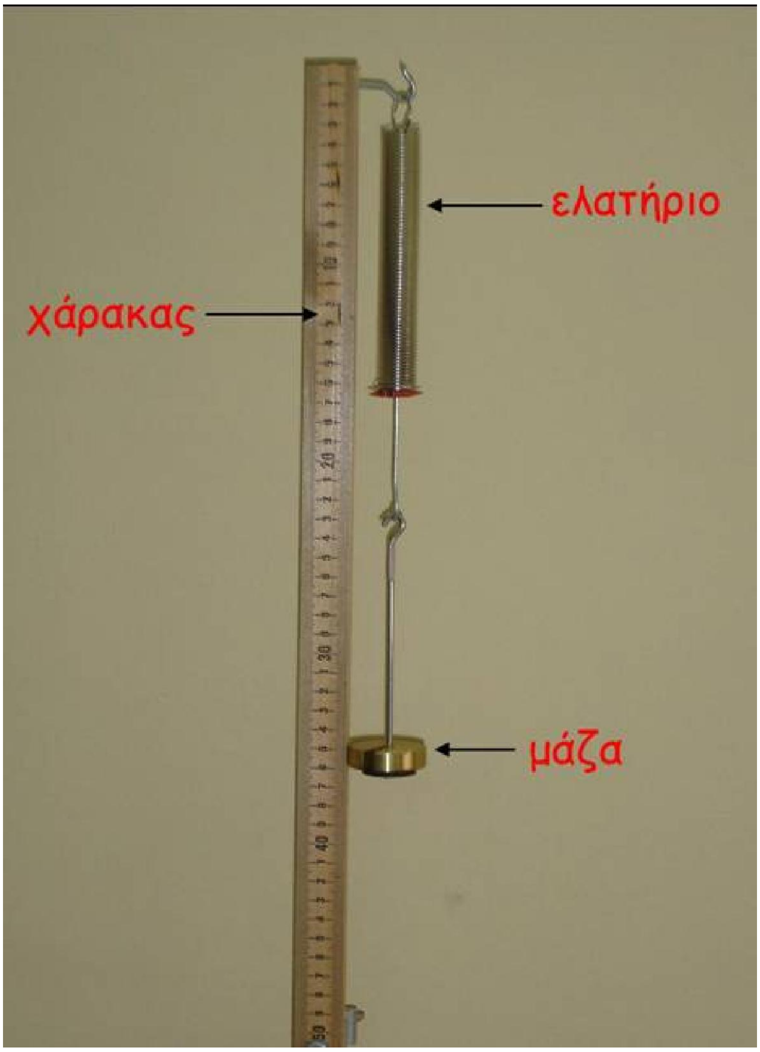
Επομένως, θα πρέπει να αναζητηθεί μια βελτιωμένη εξίσωση για την περίοδο του συστήματος ελατήριο – μάζα που θα ενσωματώνει τη μάζα του ελατηρίου. Η βελτιωμένη σχέση είναι η παρακάτω:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{m_{\varepsilon\lambda}}{3}}{k}} \qquad (9)$$

όπου $m_{\varepsilon\lambda}$ η μάζα του ελατηρίου.

II. Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη που θα χρησιμοποιήσετε απεικονίζεται παρακάτω:



Αποτελείται από το ελατήριο και μια σειρά από 10 όμοιες μάζες που αναρτώνται διαδοχικά στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου. Η μεταβολή του μήκους x του ελατηρίου με την ανάρτηση των μαζών μετράται με τη βοήθεια του χάρακα. Για τη μέτρηση της περιόδου του συστήματος ελατηρίου – μάζας συνίσταται η χρήση του κινητού σας τηλεφώνου.

III. Λήψη, πίνακες και επεξεργασία μετρήσεων

1) Υπολογισμός της σταθεράς ελατηρίου από το νόμο του Hooke

Επιλέγουμε κάποιο σταθερό σημείο στο ελατήριο (το τέλος του ή τον ενσωματωμένο δείκτη που έχει) και σημειώνουμε την αρχική ένδειξη, x_0, χωρίς βάρος στο ελατήριο. Η ένδειξη αυτή αντιστοιχεί στο φυσικό μήκος του ελατηρίου.

Τοποθετούμε διαδοχικά τις 10 γνωστές μάζες στο άκρο του ελατηρίου, ξεκινώντας από μία μάζα και προσθέτοντας τις υπόλοιπες, και σημειώνουμε κάθε φορά την αντίστοιχη επιμήκυνση, x_1. Στη συνέχεια, αφαιρούμε διαδοχικά μία μία τις μάζες σημειώνοντας κάθε φορά την αντίστοιχη επιμήκυνση, x_2. Υπολογίζουμε τη μέση επιμήκυνση, x, για κάθε τιμή μάζας m, ως το μέσο όρο των τιμών x_1 και x_2. Καταγράφουμε τα αποτελέσματα στον παρακάτω πίνακα μετρήσεων (στην τελευταία στήλη καταγράφονται οι μεταβολές του μήκους του ελατηρίου, $\bar{x}-x_0$) :

Α/Α	**m (g)**	x_1 **(cm)**	x_2 **(cm)**	$\bar{x}=\frac{x_1+x_2}{2}$ (cm)	$\bar{x}-x_0$ **(cm)**
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

Από τη σχέση (1), αφού αγνοήσετε το αρνητικό πρόσημο, υπολογίστε γραφικά τη σταθερά ελατηρίου k, αφού κάνετε τις αντιστοιχίες:

$F \rightarrow m\,g$ σε μονάδες Newton, N

$x \rightarrow \bar{x} - x_0$ σε m.

2) Υπολογισμός της σταθεράς ελατηρίου από την απλή αρμονική ταλάνωση

Για κάθε τιμή μάζας m μετράμε το χρόνο που απαιτείται για 10 περιόδους, 10T. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για 6 διαφορετικές τιμές μάζας m. Καταγράφουμε τα αποτελέσματα στον παρακάτω πίνακα μετρήσεων:

A/A	**m (g)**	**10T (s)**	**T(s)**
1			
2			
3			
4			
5			
6			

Από τη σχέση (9) υπολογίστε γραφικά τη σταθερά ελατηρίου k καθώς και τη μάζα ελατηρίου $m_{ελ}$. Για την επεξεργασία των παραπάνω μετρήσεων παρατηρείστε ότι η εξίσωση (9) είναι μη γραμμική, θα χρειαστεί δηλαδή να τη διαμορφώσετε πρώτα σε ευθεία. Στη συνέχεια, δημιουργήσετε την κατάλληλη γραφική παράσταση από την οποία θα προκύψουν με γραφικό τρόπο τα μεγέθη k και $m_{ελ}$.

Να έχετε πάντα στο μυαλό σας ότι δεν υπάρχει μοναδικός τρόπος για την παραπάνω διαδικασία και είστε ελεύθεροι να διαμορφώσετε όπως θέλετε τη σχέση (9) και το γράφημα σας.

Να συγκρίνετε τις δύο τιμές για τη σταθερά ελατηρίου που προσδιορίσατε από τις δύο μεθόδους, έστω D_H και D_T, και να δώσετε τη σχετική απόκλιση:

$$\left|\frac{D_H - D_T}{D_H}\right| \tag{10}$$

Να ζυγίσετε το ελατήριο και να συγκρίνετε την τιμή που θα βρείτε με εκείνη που υπολογίσατε γραφικά στην άσκηση. Να δώσετε επίσης τη σχετική απόκλιση των δύο τιμών όπως στην παραπάνω σχέση (10).

Τέλος, να σχολιάσετε συνοπτικά τις τιμές των σχετικών αποκλίσεων που υπολογίσατε.