Εργαστηριακή Άσκηση 5

Μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας με τη μέθοδο του απλού εκκρεμούς

Βαρσάμης Χρήστος

- Στόχος: Μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας, g.
- Πειραματική διάταξη: Χρήση απλού εκκρεμούς.
- Μέθοδος: Αξιοποίηση της εξάρτησης της περιόδου του απλού εκκρεμούς, Τ, από την επιτάχυνση της βαρύτητας, g, μέσω της σχέσης $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, όπου L το μήκος του εκκρεμούς.

I. Απαραίτητες θεωρητικές γνώσεις

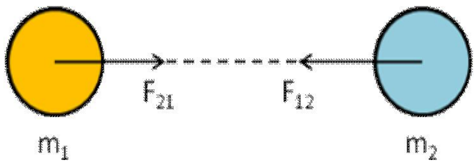
1. Η επιτάχυνση της βαρύτητας g

Ας δούμε αρχικά τι είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Χάρη στη θεμελιώδη και πρωτοποριακή εργασία του Νεύτωνα από το 1687 γνωρίζουμε ότι κάθε μάζα, m_1, στο σύμπαν ασκεί μια ελκτική δύναμη σε οποιαδήποτε άλλη μάζα, m_2. Το μέτρο της δύναμης είναι ανάλογο του γινομένου των δύο μαζών και αντιστρόφως ανάλογο του τετραγώνου της απόστασης τους, r. Δηλαδή:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (1)$$

όπου G η σταθερά παγκόσμιας έλξης με τιμή $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/Kg^2}$.

Η διεύθυνση της βαρυτικής δύναμης βρίσκεται στην ευθεία που ενώνει το κέντρο μαζών των δύο σωμάτων. Η φορά της, δεδομένου ότι είναι πάντοτε ελκτική, δείχνει πάντα προς το κέντρο μάζας του ενός σώματος, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Θεωρείστε τώρα μια μάζα m στην επιφάνεια της γης. Αυτή σύμφωνα με τη σχέση (1) δέχεται μια δύναμη από τη γη ίση με:

$$F = G\frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma^2} \qquad (2)$$

όπου M_Γ και R_Γ η μάζα και η ακτίνα της γης, αντίστοιχα. Έχουμε όμως 'βαφτίσει' τη δύναμη F της σχέσης (2) ως το βάρος ενός σώματος, δηλαδή $F = B = mg$, επομένως:

$$mg = G\frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma^2} \Rightarrow g = G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \qquad (3)$$

Από τις γνωστές τιμές $M_\Gamma = 5.9742 \times 10^{24}$ kg και $R_\Gamma = 6371$ km διαπιστώνουμε ότι $g \approx 10\ m/s^2$.

Σχόλιο: Δεδομένου ότι η γη δεν είναι απόλυτα σφαιρική η ακτίνα της μεταβάλλεται μεταξύ 6353 και 6384 km, γεγονός που προσδίδει στο g την εξάρτησή του από το γεωγραφικό πλάτος ενός τόπου. Για περισσότερες πληροφορίες ανατρέξτε στον παρακάτω σύνδεσμο:

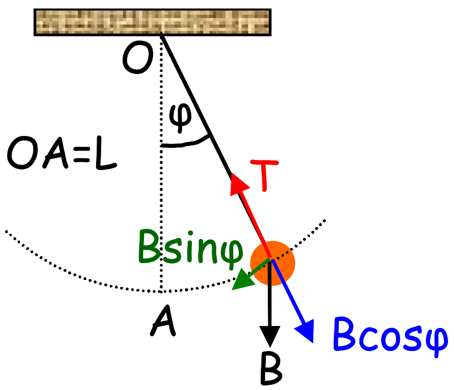
http://www.earthsci.unimelb.edu.au/ES304/MODULES/GRAV/NOTES/latitude.html

2. Το απλό εκκρεμές ως ιδανικό μοντέλο εκκρεμούς

Ως απλό εκκρεμές εννοούμε ένα (σημειακό) σώμα μάζας m αναρτημένο σε ιδανικό νήμα (αβαρές και μη εκτατό) μήκους L με το ένα άκρο του νήματος σταθερό σε κάποιο σημείο. Αυτό το σύστημα ισορροπεί στην κατακόρυφη θέση και οι δυνάμεις που ασκούνται στη μάζα m είναι το βάρος της, Β, και η τάση του νήματος, Τ. Το βάρος έχει πάντα κατακόρυφη διεύθυνση με φορά προς τα κάτω ενώ η τάση του νήματος κατευθύνεται πάντα προς το σταθερό σημείο Ο. Όταν η μάζα εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας κατά γωνία φ, τότε θα εκτελέσει κυκλική κίνηση ακτίνας L. Αναλύοντας το βάρος Β σε ακτινική, Βcosφ, και επιτρόχια, Β sinφ, συνιστώσα και εφαρμόζοντας το νόμο της δυναμικής για την επιτρόχια συνιστώσα λαμβάνουμε:

$$-mg\sin\varphi = m\frac{d^2s}{dt^2} \qquad (4)$$

όπου s το διάστημα που διανύει το σώμα στην περιφέρεια του κύκλου.



Σημείωση: σκεφθείτε την εμφάνιση του αρνητικού προσήμου στη σχέση (4). Παίρνοντας ως σημείο αναφοράς το Α (θέση ισορροπίας) και θετική φορά προς τα δεξιά παρατηρούμε ότι:

- *δεξιά από το Α η μετατόπιση και η γωνία φ είναι θετικές ενώ η δύναμη Βsinφ είναι αρνητική αφού δείχνει πάντα αριστερά.*
- *αριστερά από το Α η μετατόπιση και η γωνία φ είναι αρνητικές ενώ η δύναμη Βsinφ είναι θετική αφού η φορά της είναι πάντα προς τα δεξιά.*

Επομένως, η επιτρόχια συνιστώσα του βάρους και η γωνία φ (άρα και ο όρος sinφ) έχουν πάντα αντίθετο πρόσημο. Συνεπώς, έχουμε ότι η συνολική δύναμη θα είναι ίση με -mgsinφ.

Γενικά, αξίζει να θυμάστε ότι οι δυνάμεις που δρουν έτσι ώστε να κατευθύνουν ένα σύστημα προς την κατάσταση ισορροπίας του λέγονται δυνάμεις επαναφοράς και αν είναι οι μοναδικές εξωτερικές δυνάμεις τότε το σύστημα θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση.

Αφού s = Lφ και L=σταθερό, έχουμε ότι:

$$-g\sin\varphi = L\frac{d^2\varphi}{dt^2} \qquad (5)$$

Στο σημείο αυτό χρησιμοποιούμε την προσέγγιση του απλού εκκρεμούς, ότι δηλαδή το σώμα εκτρέπεται σε πάρα πολύ μικρές γωνίες φ για τις οποίες ισχύει ότι sinφ=φ.

Σχόλιο: Για να έχετε μια αίσθηση του όρου πάρα πολύ μικρές γωνίες, για φ=0.1 rad (περίπου 6°) έχουμε ότι sinφ=0.0998 που αντιστοιχεί σε σφάλμα 0.2%. Παρατηρήστε επίσης ότι για πάρα πολύ μικρές γωνίες η κίνηση είναι ουσιαστικά ευθύγραμμη αφού το μήκος του τόξου του κύκλου ισούται με το μήκος της αντίστοιχης χορδής.

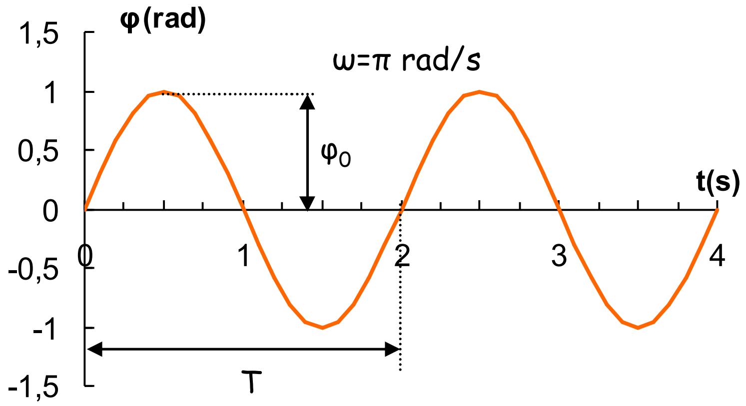
Επομένως, η σχέση (5) γράφεται τελικά:

$$-g\varphi = L\frac{d^2\varphi}{dt^2} \Rightarrow L\frac{d^2\varphi}{dt^2} + g\varphi = 0 \qquad (6)$$

Η παραπάνω εξίσωση, γνωστή ως διαφορική εξίσωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης, επιδέχεται λύσεις της μορφής:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin\omega t \qquad (7)$$

Η εξάρτηση της γωνίας φ από το χρόνο, φ(t), απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα όπου αναφέρονται τα χαρακτηριστικά μεγέθη της ταλάντωσης, πλάτος, φ_0, και κυκλική συχνότητα, ω.



Είναι φανερό ότι το σώμα εκτελεί περιοδική κίνηση με τη γωνία απομάκρυνσης του από τη θέση ισορροπίας φ να μεταβάλλεται συνεχώς μεταξύ των τιμών -1 και 1 rad. Η κίνηση αυτή ονομάζεται απλή αρμονική ταλάντωση.

<u>Σχόλιο</u>: Η λύση της σχέσης (7) ισχύει όταν για t=0 το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας. Επαληθεύστε ότι η γενική λύση είναι της μορφής $\varphi(t)=\varphi_0 \sin(\omega t+\theta)$ όπου θ η αρχική φάση και φ_0 το πλάτος της ταλάντωσης. Για πληρέστερη ανάλυση της απλής αρμονικής ταλάντωσης δείτε την εργαστηριακή άσκηση 6.

Τελικά, αφού s = Lφ, το διάστημα που διανύει το σώμα είναι:

$$s(t) = L\varphi_0 \sin\omega t \tag{8}$$

δηλαδή το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος $L\varphi_0$ και κυκλική συχνότητα ω. Αντικαθιστώντας τη σχέση (7) στη διαφορική εξίσωση (6) παίρνουμε ότι:

$$\omega^2 = g/L \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{8}$$

Απομένει να βρούμε μια έκφραση για την περίοδο Τ του απλού εκκρεμούς. Αφού η κίνηση είναι περιοδική, στο χρόνο μιας περιόδου θα έχουμε ότι:

$$\varphi(t+T) = \varphi(t) \Rightarrow \sin(\omega(t+T)) = \sin\omega t \Rightarrow \omega(t+T) = 2\pi + \omega t \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{9}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (8) και (9) καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{10}$$

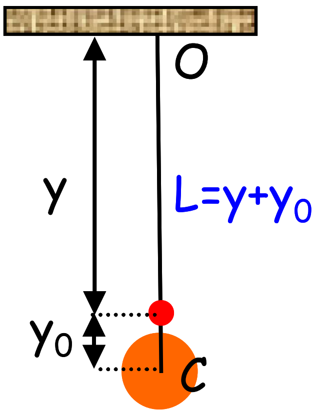
που είναι η κεντρική εξίσωση για την εκτέλεση του πειράματος.

3. Η διάταξη του εκκρεμούς της εργαστηριακής άσκησης

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω το απλό εκκρεμές αποτελεί ένα ιδανικό μοντέλο όπου η μάζα είναι σημειακή και το νήμα εξάρτησης της ιδανικό. Στην πράξη, το εκκρεμές που θα χρησιμοποιήσετε αποτελείται από ένα σφαιρίδιο μη σημειακό αναρτημένο από νήμα με μη αμελητέα μάζα. Επομένως, για να είναι δυνατή η εφαρμογή των όσων αναφέρθηκαν προηγουμένως, θα πρέπει να είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε το κέντρο μάζας του συστήματος νήμα-σφαιρίδιο. Μόνο τότε μπορούμε να μετρήσουμε ικανοποιητικά το μήκος του εκκρεμούς που χρειαζόμαστε για την άσκηση.

Σχόλιο: Μπορούμε πάντα να περιγράψουμε τη δυναμική ενός συστήματος σωματιδίων αντικαθιστώντας το σύστημα μας με ένα υλικό σημείο, το κέντρο μάζας του, όπου βρίσκεται συγκεντρωμένη η συνολική μάζα του συστήματος.

Επειδή ο προσδιορισμός του κέντρου μάζας του συστήματος νήμα-σφαιρίδιο αποτελεί δύσκολο εγχείρημα, παρότι αναμένουμε το κέντρο μάζας να συμπίπτει με το κέντρο μάζας του σφαιριδίου *C* (σκεφθείτε γιατί), προβαίνουμε στο ακόλουθο τέχνασμα: φτιάχνουμε ένα κόμπο στη νήμα που βρίσκεται πολύ κοντά στο σφαιρίδιο, για την ελαχιστοποίηση του σφάλματος στη μέτρηση του μήκους του εκκρεμούς, όπως φαίνεται παρακάτω.



Έτσι, ενώ θα έπρεπε να μετρήσουμε το μήκος $L=OC$, μετράμε την απόσταση y από το σημείο ανάρτησης μέχρι τον κόμπο που δημιουργήσαμε. Με αυτό τον τρόπο αίρουμε την αβεβαιότητα του ακριβούς προσδιορισμού του κέντρου μάζας του συστήματος. Βέβαια, πληρώνουμε κάποιο τίμημα που είναι η διαμόρφωση της εξίσωσης (10) για την περίοδο του απλού εκκρεμούς στη σχέση:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{y + y_0}{g}} \tag{11}$$

Τελικά, η παραπάνω σχέση θα χρησιμοποιηθεί για την εκτέλεση του πειράματος όπου τα μετρούμενα και μεταβαλλόμενα μεγέθη θα είναι η απόσταση y και η περίοδος T. Προσέξτε ότι η ανάλυση των αποτελεσμάτων που θα συλλέξετε θα οδηγήσουν στον προσδιορισμό τόσο του g όσο και της απόστασης y_0, με βάση τα όσα διδαχθήκατε στην άσκηση 2 των γραφικών παραστάσεων.

II. Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη που θα χρησιμοποιήσετε απεικονίζεται παρακάτω:

Ουσιαστικά, αποτελείται από το απλό εκκρεμές και ένα χρονόμετρο όπου στην πράξη είναι καλύτερα να χρησιμοποιήστε το χρονόμετρο του κινητού σας τηλεφώνου. Η μεταβολή του μήκους y επιτυγχάνεται τυλίγοντας διαδοχικά το νήμα στα δύο άγκιστρα της βάσης στήριξης.

III. Λήψη, πίνακες και επεξεργασία μετρήσεων

Για κάθε τιμή του μήκους y μετράμε το χρόνο που απαιτείται για 10 περιόδους, 10T. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για 10 διαφορετικές τιμές του μήκους y. Καταγράφουμε τα αποτελέσματα στον παρακάτω πίνακα μετρήσεων:

Α/Α	**y (cm)**	**10T (s)**	**T(s)**
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Να εκτιμήσετε και να καταγράψετε τα σφάλματα στα μεγέθη y και T.

Για την επεξεργασία των παραπάνω μετρήσεων και τον τελικό προσδιορισμό των μεγεθών g και y_0 παρατηρείστε ότι η εξίσωση (11) που συνδέει την περίοδο Τ με το μήκος y είναι μη γραμμική, επομένως θα χρειαστεί να τη διαμορφώσετε πρώτα σε ευθεία. Στη συνέχεια, δημιουργήσετε την κατάλληλη γραφική παράσταση από την οποία θα προκύψουν με γραφικό τρόπο τα μεγέθη g και y_0. Να έχετε πάντα στο μυαλό σας ότι δεν υπάρχει μοναδικός τρόπος για την παραπάνω διαδικασία και είστε ελεύθεροι να διαμορφώσετε όπως θέλετε τη σχέση (11) όπως επίσης να κάνετε τη γραφική παράσταση. Το ζητούμενο βέβαια είναι ότι διαλέξετε να το κάνετε σωστά!