Εργαστηριακή Άσκηση 4

Μελέτη ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης και του θεωρήματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας με τη διάταξη της αεροτροχιάς

Βαρσάμης Χρήστος

- Στόχος: Μελέτη της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης και του θεωρήματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας.
- Πειραματική διάταξη: Δρομέας που κινείται πάνω σε αεροτροχιά υπό την επίδραση σταθερής εξωτερικής δύναμης.
- Μέθοδος: Προσδιορισμός της ταχύτητας που αποκτά ο δρομέας για δεδομένες αποστάσεις. Υπολογισμός της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του δρομέα και σύγκριση της με το έργο της σταθερής εξωτερικής δύναμης.

Ι. Απαραίτητες θεωρητικές γνώσεις

1. Βασικές αρχές κινηματικής

Η θέση ενός σώματος στο χώρο προσδιορίζεται επιλέγοντας αυθαίρετα κάποιο σύστημα αναφοράς, το οποίο συνήθως είναι το καρτεσιανό σύστημα στο οποίο οι τρεις άξονες είναι κάθετοι μεταξύ τους. Η θέση παριστάνεται με ένα διάνυσμα με αρχή την αρχή των αξόνων και τέλος το ίδιο το σώμα (που θεωρούμε σημειακό). Το διάνυσμα αυτό λέγεται διάνυσμα θέσης, $\vec{r}$. Όταν το σώμα κινείται σε ευθύγραμμη τροχιά τότε χρειαζόμαστε μόνο μια συνιστώσα του διανύσματος θέσης, έστω τη συνιστώσα x, η οποία μεταβάλλεται με το χρόνο, σύμφωνα με την εξίσωση κίνησης x(t). Ο ρυθμός μεταβολής της θέσης με το χρόνο ονομάζεται μέση ταχύτητα, $\bar{\upsilon}$:

$$\bar{\upsilon} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{1}$$

Συνήθως, στην πράξη μας ενδιαφέρει η στιγμιαία ταχύτητα, υ, που λαμβάνουμε για πολύ μικρό (απειροστό) χρονικό διάστημα, δηλαδή όταν $\Delta t \to 0$. Σε αυτή την περίπτωση, ο ορισμός (1) ταυτίζεται με τη μαθηματική έννοια της χρονικής παραγώγου της συνάρτησης x(t) και γράφουμε:

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \tag{2}$$

Με παρόμοια διαδικασία μπορούμε να ορίσουμε ως μέση επιτάχυνση, $\bar{\alpha}$, το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας με το χρόνο:

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} \tag{3}$$

Επίσης, η στιγμιαία επιτάχυνση, α, λαμβάνεται για πολύ μικρό (απειροστό) χρονικό διάστημα, δηλαδή όταν $\Delta t \to 0$. Ο ορισμός (3) ταυτίζεται τότε με τη μαθηματική έννοια της χρονικής παραγώγου της συνάρτησης υ(t) και γράφουμε:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \frac{d\upsilon}{dt} \tag{4}$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις (2) και (4), αν γνωρίζουμε την εξίσωση κίνησης x(t) ενός κινητού, τότε με διαδοχικές παραγωγίσεις μπορούμε να υπολογίσουμε τόσο την ταχύτητά του όσο και την επιτάχυνσή του. Όταν γνωρίζουμε την επιτάχυνση του κινητού με το χρόνο, α(t), τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητά του και τη θέση του με διαδοχικές ολοκληρώσεις, σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\alpha(t) = \frac{du(t)}{dt} \Rightarrow du = \alpha dt \Rightarrow \int_{u_0}^{u} du = \int_{t_0}^{t} \alpha dt \Rightarrow u = u_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha dt \quad (5)$$

$$u(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow dx = u dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} u dt \Rightarrow x = x_0 + \int_{t_0}^{t} u dt \quad (6)$$

2. Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

Όταν ένα κινητό κινείται σε ευθεία τροχιά με σταθερή επιτάχυνση, α, τότε η κίνηση λέγεται ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη. Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις (5) και (6) με τις ακόλουθες αρχικές συνθήκες, για $t_0=0$ $u_0=0$ και $x_0=0$ (που σημαίνει ότι αρχικά το σώμα βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και ξεκινά από την ηρεμία), λαμβάνουμε τις σχέσεις:

$$u = \alpha t \quad (7)$$

$$x = \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (8)$$

Απαλείφοντας το χρόνο από τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε ότι:

$$u^2 = 2\alpha x \quad (9)$$

3. Έργο δύναμης

Όταν ασκήσουμε μια δύναμη, F, σε ένα σώμα τότε η δύναμη παράγει έργο μόνο όταν μετατοπίζει το σώμα. Στη γενική περίπτωση, για μια στοιχειώδη μετατόπιση του σώματος ds υπό την επίδραση της δύναμης F, το στοιχειώδες έργο, dW, είναι:

$$dW = \vec{F} \bullet d\vec{s} \quad (10)$$

<u>Σχόλιο</u>: Προσέξτε ότι στη σχέση (10) υπάρχει εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων F και ds. Αυτό σημαίνει ότι:

1) το έργο είναι μονόμετρο μέγεθος.

2) έργο παράγουν οι συνιστώσες της δύναμης που είναι παράλληλες στη μετατόπιση.

3) έργο καταναλώνουν οι συνιστώσες της δύναμης που είναι αντιπαράλληλες στη μετατόπιση, όπως οι δυνάμεις τριβής.

4) δυνάμεις κάθετες στη μετατόπιση δεν παράγουν έργο

Εφαρμόζοντας διαστατική ανάλυση, αφού στο SI η μετατόπιση x μετράται σε m και η δύναμη F σε N (ή Kg m s^{-2}), η μονάδα μέτρησης του έργου θα είναι N m, που ονομάζεται J (Joule).

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (10), το έργο δύναμης F δίνεται από τη σχέση:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} \qquad (11)$$

όπου το ολοκλήρωμα υπολογίζεται πάνω στην τροχιά κίνησης του σώματος. Για την περίπτωση ευθύγραμμης κίνησης υπό την επίδραση σταθερής δύναμης, η σχέση (11) μετατρέπεται στην εξίσωση:

$$W = F \cos\varphi \, \Delta x \qquad (12)$$

όπου Δx η μετατόπιση του σώματος και φ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της δύναμης με το αντίστοιχο της μετατόπισης.

4. Το Θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας

Το έργο της συνολικής δύναμης που δρα πάνω σε ένα σώμα κατά τη μετατόπιση του από την αρχική θέση A στην τελική θέση B ισούται με τη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας. Η μεταβολή ισούται με την κινητική ενέργεια στην τελική θέση μείον την κινητική ενέργεια στην αρχική θέση.

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστούμε αρχικά το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής, ή δεύτερο νόμο του Newton, που σχετίζει τη δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα, F, με τον αντίστοιχο χρονικό ρυθμό της μεταβολής της ορμής του, dp:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (13)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην εξίσωση (11) λαμβάνουμε:

$$W = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_A^B \frac{d\vec{p}}{dt} \bullet d\vec{s} = \int_A^B d\vec{p} \bullet \frac{d\vec{s}}{dt} = \int_A^B d(m\vec{\upsilon}) \bullet \vec{\upsilon} = m\int_A^B d\vec{\upsilon} \bullet \vec{\upsilon} = \frac{1}{2}m\upsilon_B^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_A^2 \qquad (14)$$

Οι ποσότητες $\frac{1}{2}m\upsilon_B^2$ και $\frac{1}{2}m\upsilon_A^2$ αντιστοιχούν στην κινητική ενέργεια του σώματος στις θέσεις B και A, αντίστοιχα.

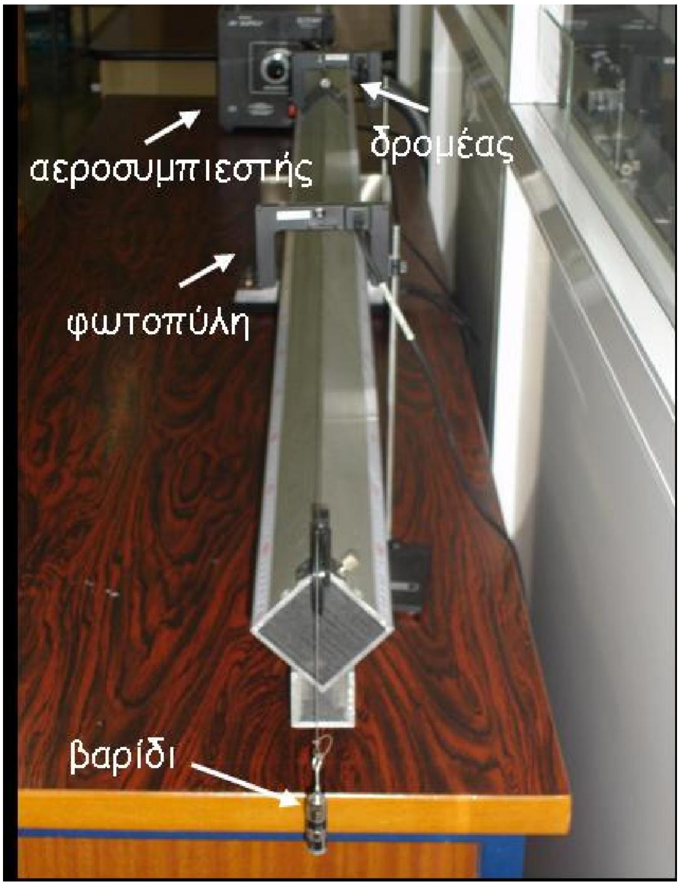
<u>Σημείωση:</u> στη σχέση (14) τα σημεία A και B στα όρια του ολοκληρώματος αντιστοιχούν στην αρχική και τελική θέση του σώματος.. Επίσης, δώστε προσοχή στα παρακάτω:

- *η ορμή του σώματος ορίζεται ως $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$.*
- *η απόδειξη ισχύει μόνο όταν θεωρήσουμε πως η μάζα του σώματος είναι σταθερή, κάτι που ισχύει στα πλαίσια της κλασσικής μηχανικής.*
- *στο προτελευταίο βήμα το εσωτερικό γινόμενο $d\vec{\upsilon} \bullet \vec{\upsilon}$ είναι απλά το γινόμενο των μέτρων των διανυσμάτων αφού η στοιχειώδης ταχύτητα, du, είναι πάντα παράλληλη στην ταχύτητα, υ.*

- *το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας έχει γενική ισχύ ανεξαρτήτως του είδους των δυνάμεων που δρουν στο σώμα. Ως αντιπαράδειγμα, θυμηθείτε ότι η αρχή διατήρησης της ενέργειας ισχύει μόνο όταν οι δυνάμεις είναι συντηρητικές.*
- *όμως, ισχύει μόνο όταν οι μεταβολές που προκαλούνται στο σώμα αφορούν αποκλειστικά στην ταχύτητα του.*
- *τέλος, παρατηρήστε ότι δεν μας απασχολεί η συγκεκριμένη διαδρομή που ακολουθεί το σώμα μεταξύ της αρχικής και τελικής του θέσης.*

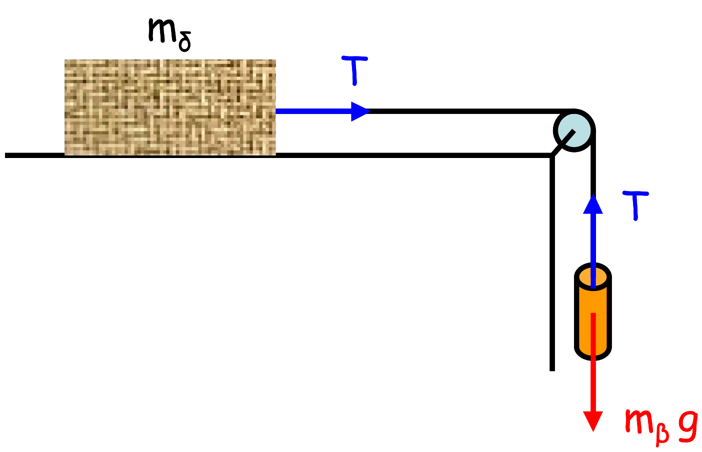
5. Η διάταξη της αεροτροχιάς της εργαστηριακής άσκησης

Η διάταξη της άσκησης απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα 1.



***Σχήμα 1**: Η διάταξη της αεροτροχιάς.*

Ο δρομέας, που είναι αρχικά ακίνητος, συνδέεται με αβαρές νήμα με βαρίδι γνωστής μάζας, $m_β$. Όσο το βαρίδι αιωρείται (βρίσκεται πάνω από το πάτωμα) τότε, μόλις αυτό αφεθεί ελεύθερο, ο δρομέας θα αρχίσει να κινείται υπό την επίδραση της τάσης του νήματος. Εκείνο που πρέπει να τονισθεί είναι ότι η αεροτροχιά, που ενεργοποιείται εκκινώντας τον αεροσυμπιεστή, συμβάλλει στο να 'αντισταθμίσει', λόγω του ρεύματος αέρα που παρέχει, το βάρος του δρομέα με τελικό αποτέλεσμα να εκμηδενίζει τις τριβές. Επομένως, η κίνηση στην αεροτροχιά προσομοιώνεται με το παρακάτω σχήμα:



***Σχήμα 2**: Δυνάμεις στη διάταξη της αεροτροχιάς.*

Ο νόμος της δυναμικής οδηγεί στις εξισώσεις (τα σώματα κινούνται με κοινή επιτάχυνση):

$$m_β g - T = m_β a \qquad (15)$$

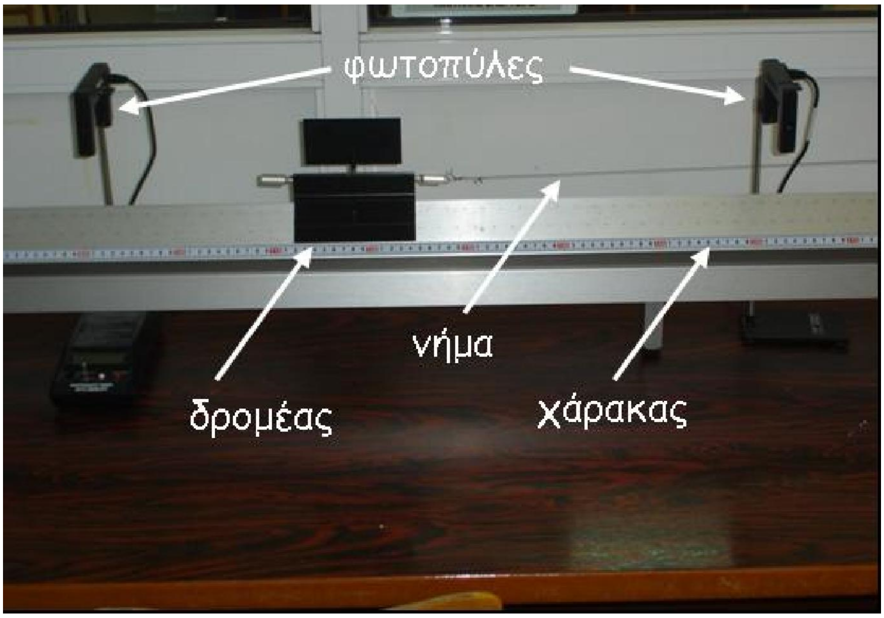
$$T = m_δ a \qquad (16)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη καταλήγουμε στον υπολογισμό της επιτάχυνσης α:

$$\alpha = \frac{m_\beta}{m_\beta + m_\delta} g \qquad (17)$$

II. Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη που θα χρησιμοποιήσετε παρουσιάσθηκε στο σχήμα 1. Στο παρακάτω σχήμα 3 φαίνεται σε μεγέθυνση ο δρομέας, οι φωτοπύλες, το νήμα και ο βαθμονομημένος χάρακας της αεροτροχιάς:



***Σχήμα 3**: Διάταξη της αεροτροχιάς.*

III. Λήψη, πίνακες και επεξεργασία μετρήσεων

Για την εκτέλεση της άσκησης ακολουθείστε τα παρακάτω βήματα:

Μελέτη της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης

1) Προσδιορίστε τη θέση, x_0, του δρομέα πάνω στην αεροτροχιά για την οποία το βαρίδι εφάπτεται στο οριζόντιο δάπεδο.

2) Προσδιορίστε την απόσταση μεταξύ των δύο φωτοπυλών, s. Για το σκοπό αυτό μετακινήστε αργά το δρομέα έτσι ώστε να σημειώσετε τις ακόλουθες δύο χαρακτηριστικές ενδείξεις: η πρώτη ένδειξη, s_1, στην οποία ξεκινά το χρονόμετρο της άσκησης, όταν το δεξί άκρο του δρομέα ενεργοποιήσει την αριστερή φωτοπύλη, και η δεύτερη, s_2, αντιστοιχεί στη θέση του δρομέα στην οποία σταματά το χρονόμετρο της άσκησης, όταν το δεξί άκρο του δρομέα ενεργοποιήσει τη δεξιά φωτοπύλη. Η απόσταση s με την παραπάνω διαδικασία ισούται με $s_2 - s_1$.

3) Απομακρύνετε το δρομέα σε διαφορετικές αποστάσεις x, όπως δίνονται στον παρακάτω πίνακα, από τη θέση x_0 του βήματος 1 προς τα αριστερά. Στο διάστημα των αποστάσεων αυτών, ο δρομέας εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ενώ μόλις το βαρίδι ακουμπήσει στο έδαφος (αυτό γίνεται στη θέση x_0) ο δρομέας θεωρητικά θα συνεχίσει να κινείται ευθύγραμμα και ομαλά. Με ακίνητο το δρομέα (κάποιος τον κρατά με το χέρι) εκκινήστε τον αεροσυμπιεστή και, στη συνέχεια, καταγράψτε το χρόνο κίνησης του δρομέα ανάμεσα στις φωτοπύλες, t. Επαναλάβατε 5 μετρήσεις του χρόνου κίνησης για κάθε τιμή του x. Υπολογίστε το μέσο όρο των χρόνων, $\bar{t}$, και στη συνέχεια την ταχύτητα του δρομέα από τη σχέση $υ = x/\bar{t}$. Καταγράψτε τα αποτελέσματα στον παρακάτω πίνακα μετρήσεων:

Α/Α	**x (m)**	t_1 **(s)**	t_2 **(s)**	t_3 **(s)**	t_4 **(s)**	t_5 **(s)**	$\bar{t}$ **(s)**	υ (m/s)
1	0.30							
2	0.40							

3	0.50							
4	0.60							
5	0.70							

Από τη σχέση (9) προσδιορίστε, με κατάλληλη διαμόρφωση της σχέσης σε ευθεία και την αντίστοιχη γραφική παράσταση, την επιτάχυνση του δρομέα, α.

4) Υπολογίστε με βάση τη σχέση (17) την τιμή της θεωρητικής επιτάχυνσης, α_Θ, και συγκρίνετε τις δύο τιμές α και α_Θ. Να δώσετε τη σχετική απόκλιση:

$$\left|\frac{\alpha_\theta - \alpha}{\alpha_\theta}\right|$$

Μελέτη του θεωρήματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας

1) Για κάθε απόσταση x να υπολογίσετε τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας, ΔE_K, σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα μετρήσεων:

Α/Α	**x (m)**	$\bar{t}$ **(s)**	υ (m/s)	ΔE_K (J)
1	0.30			
2	0.40			
3	0.50			
4	0.60			
5	0.70			

2) Για κάθε απόσταση x να υπολογίσετε το έργο της δύναμης που κινεί το δρομέα, Τ (βλ. σχήμα 2 και σχέση 16). Καταγράψτε τα αποτελέσματα στον παρακάτω πίνακα μετρήσεων:

Α/Α	**x (m)**	T (N)	W (J)
1	0.30		
2	0.40		
3	0.50		
4	0.60		
5	0.70		

3) Για κάθε απόσταση x, με βάση τους δύο παραπάνω πίνακες να δημιουργήσετε τον παρακάτω πίνακα μετρήσεων:

Α/Α	**x (m)**	ΔE_K (J)	W (J)	$\left\lvert \frac{W-\Delta E_K}{W} \right\rvert \%$
1	0.30			
2	0.40			
3	0.50			
4	0.60			
5	0.70			

Τέλος, να σχολιάσετε συνοπτικά τις τιμές των αποκλίσεων που υπολογίσατε στην τελευταία στήλη του παραπάνω πίνακα.