Επεξεργασία Δεδομένων - Γραφικές Παραστάσεις

1. Σκοπός

Σκοπός της άσκησης είναι να εξοικειωθούν οι σπουδαστές με τη γραφική απεικόνιση των δεδομένων τους, την χρήση των γραφικών παραστάσεων για την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με την ποιοτική σχέση που συνδέει τα απεικονιζόμενα μεγέθη καθώς επίσης και τον υπολογισμό φυσικών μεγεθών.

2. Γενικά

Η χρήση γραφικών παραστάσεων για την απεικόνιση των δεδομένων ενός πειράματος είναι χρήσιμη γιατί μας βοηθά να βγάλουμε εύκολα συμπεράσματα σχετικά με την εξέλιξη των μετρήσεών μας και γενικά του φαινομένου που εξετάζουμε. Επιπλέον οι γραφικές παραστάσεις μας βοηθούν στην κατανόηση των δεδομένων μας διότι μας επιτρέπουν να κάνουμε εύκολα συγκρίσεις και μας δείχνουν γρήγορα και καθαρά πόσο καλά οι μετρήσεις μας συμφωνούν με κάποια πρόβλεψη.

3. Σύντομο θεωρητικό μέρος

Για να χαραχθεί μια γραφική παράσταση που αφορά αναπαράσταση ενός μεγέθους Y ως συνάρτηση ενός μεγέθους X, Y=f (X), που είναι καταχωρημένα στον κατάλληλο πίνακα δεδομένων, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. Χρησιμοποιούμε συνήθως μισή περίπου σελίδα χιλιοστομετρικό χαρτί και στο πάνω μέρος γράφουμε τον τίτλο της γραφικής παράστασης.
2. Επιλέγουμε το μέγεθος που θα παρασταθεί στον κατακόρυφο και οριζόντιο άξονα αντίστοιχα.
   Για παράδειγμα εάν θέλουμε να παραστήσουμε γραφικά την τάση ως συνάρτηση του ρεύματος V= f(I), στον κατακόρυφο άξονα θα αντιστοιχηθούν οι τιμές της τάσης και στον οριζόντιο οι τιμές του ρεύματος (Εικόνα 1).
3. Ονομάζουμε τους άξονες και γράφουμε τις μονάδες μέτρησης κάθε μεγέθους (Για παράδειγμα: Τάση (V), Ρεύμα (mA))
4. Επιλέγουμε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή για τον κάθε άξονα ώστε ο κάθε άξονας, να καλύπτει το σύνολο των δεδομένων.
5. Επιλέγουμε το «βήμα», δηλαδή την αντιστοιχία του μεγέθους μας ανά cm του άξονα. (Για παράδειγμα: 2 V/cm για τον κατακόρυφο άξονα και 5 mA/cm στον οριζόντιο.) Αυτό γίνεται με βάση το εύρος των τιμών κάθε μεγέθους που βρίσκεται στον πίνακα δεδομένων.
6. Τοποθετούμε τα σημεία στο γράφημα χρησιμοποιώντας το σύμβολο X.
7. Χαράζουμε την καμπύλη μας συμμετρικά μέσα από τα πειραματικά σημεία.

Επισημάνσεις:

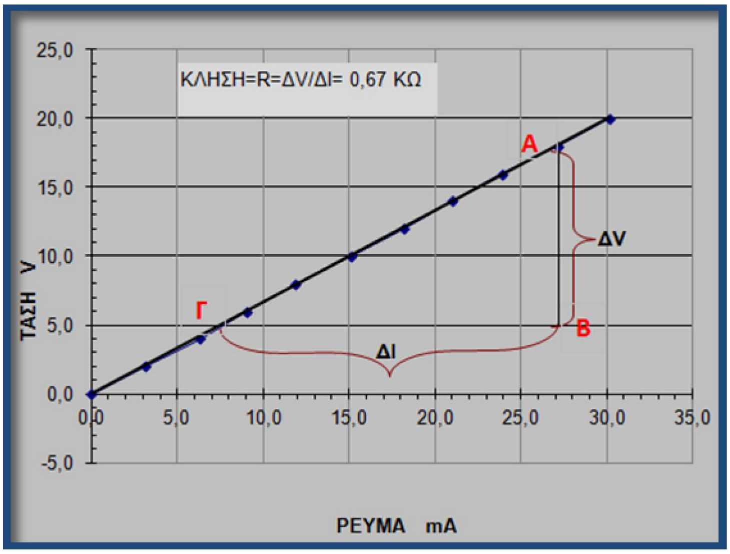
- Για να εκμεταλλευτούμε την ευκολία του χιλιστομετρικού χαρτιού οι άξονες πρέπει να υποδιαιρούνται σε πολλαπλάσια ή υποπολλαπλάσια του 1,2 και 5.

- Οι άξονες δεν είναι απαραίτητο να υποδιαιρούνται με τον ίδιο τρόπο.

- Η υποδιαίρεση των αξόνων πρέπει να γίνεται με τρόπο ώστε τα πειραματικά σημεία να βρίσκονται στο κέντρο του γραφήματος. Στην περίπτωση που έχουμε γραμμική σχέση, η ευθεία να σχηματίζει ~ 45^o με τους άξονες.

- Ανάλογα με το εύρος των μετρήσεων μπορεί να γίνει μετατόπιση αξόνων, δηλαδή ο ένας ή και οι δύο άξονες να μην ξεκινούν από το μηδέν αλλά από άλλη τιμή.

V v	I mA
2,0	3,1
4,0	6,3
6,0	9,0
8,0	11,9
10,0	15,1
12,0	18,2
14,0	21,0
16,0	23,9
18,0	27,2
20,0	30,2



Εικόνα 1:Πινακας δεδομένων και γραφική παράσταση V=f(I)

<u>3.1 Μεγέθη που συνδέονται με γραμμική σχέση – Κλίση ευθείας</u>

Όταν η ανεξάρτητη X και εξηρτημένη Y μεταβλητή σε μια γραφική απεικόνηση συνδέονται με γραμμική σχέση, Y= α X +β , χαράζουμε την καλύτερη ευθεία που περνά μέσα από τα πειραματικά σημεία, με στόχο να υπολογίσουμε τις «καλύτερες τιμές» για τις παραμέτρους α και β. (Όπου α η κλίση της ευθείας και β το σημείο τομής της με τον κατακόρυφο άξονα).

Στα πλαίσια του παρόντος εργαστηρίου, χαράζουμε την καλύτερη ευθεία «με το μάτι», με τρόπο ώστε τα πειραματικά σημεία να απέχουν κατά μέσο όρο το ίδιο εκατέρωθεν της ευθείας. Η ευθεία δείχνει την μέση συμπεριφορά των μετρήσεων και δεν είναι απαραίτητο να διέρχεται οπωσδήποτε πάνω από όλα τα πειραματικά σημεία. Η χάραξη της ευθείας που προσαρμόζεται με τον καλύτερο δυνατό τρόπο στα πειραματικά δεδομένα μπορεί να γίνει με υπολογιστικό τρόπο με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων ή τη μέθοδο Gauss. Αρκετά από τα προγράμματα (π.χ Excel) που κάνουν προσαρμογή ευθείας σε πειραματικά δεδομένα χρησιμοποιούν την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

Ο ρυθμός μεταβολής των μεγεθών που συνδέονται γραμμικά είναι σταθερός και υπολογίζεται από την κλίση της ευθείας. Στο προηγούμενο παράδειγμα η σχέση που συνδέει την τάση με το ρεύμα είναι V=R*I ,δηλαδή έχει τη μορφή Y = α X.

Η κλίση της ευθείας δίδεται από τον λόγο ΑΒ/ΒΓ =ΔV/ΔΙ με βάση τη βαθμονόμηση που έχουν οι άξονες (Εικόνα 1). Δεδομένου ότι στους άξονες έχουμε αντιστοιχίσει φυσικά μεγέθη, η κλίση εκφράζει την αντίσταση, μία ποσότητα η οποία έχει μονάδες. Οι μονάδες της κλίσης προκύπτουν από το λόγο των μονάδων του κατακόρυφου προς τον οριζόντιο άξονα (V/mA) που αντιστοιχούν στο παράδειγμά μας στη μονάδα ΚΩ.

Γενικά η κλίση μπορεί να μην αντιστοιχεί ακριβώς στο μέγεθος που μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε όπως στο παραπάνω παράδειγμα, αλλά απλά να το περιέχει. Έτσι υπολογίζοντας την κλίση μπορούμε να υπολογίσουμε άμεσα ή έμμεσα μεγέθη που μας ενδιαφέρουν.

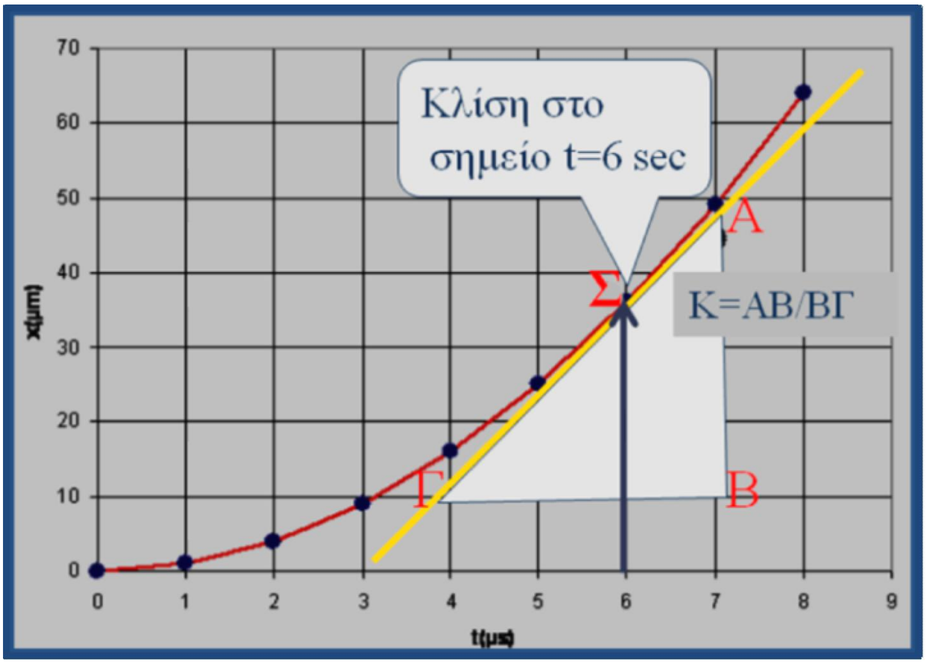
Σημειώνεται ότι στον υπολογισμό της κλίσης από τη γραφική παράσταση υπάρχει αβεβαιότητα, δεδομένου ότι μπορεί να υπάρχουν παραπάνω από μία ευθεία που να προσαρμόζεται ικανοποιητικά στα δεδομένα μας.

3.2 Μεγέθη που συνδέονται με μη γραμμική σχέση – Καμπύλες - Κλίση καμπύλης

Γενικά τα μεγέθη που συνδέονται με μη γραμμικές σχέσεις - καμπύλες όπως εκθετική, παραβολική, πολυωνυμική κλπ, δεν έχουν σταθερό ρυθμό μεταβολής όπως συμβαίνει με τη γραμμική συσχέτιση. Παραδείγματα μη γραμμικών σχέσεων που συναντώνται στη φυσική είναι:

$\chi(t)=\frac{1}{2}at^2$	$\upsilon^2=2\alpha\chi$	$Y=\frac{1}{X^2}$
$J=Jo\,e^{-\mu\chi}$	$T=2\pi\frac{\sqrt{L+a}}{g}$	$\frac{1}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$

Για παράδειγμα στη γραφική παράσταση χ=f(t) της θέσης ως προς τον χρόνο στην ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση $X(t)=\frac{1}{2}at^2$, η εφαπτόμενη της καμπύλης σε κάθε σημείο είναι διαφορετική και μας δίνει την τιμή της ταχύτητας στην αντίστοιχη χρονική στιγμή.



Εικόνα 2: Κλίση καμπύλης σε συγκεκριμένο σημείο

Για να βρεθεί η κλίση μιας καμπύλης σε ένα σημείο της, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα (Εικόνα 2):

1. Χαράσσουμε κάθετο από το σημείο ενδιαφέροντος στον οριζόντιο άξονα μέχρι να συναντήσει την καμπύλη.

2. Χαράσσουμε μια ευθεία εφαπτομενικά στο σημείο (Σ) στο οποίο η κάθετος συναντά την καμπύλη.

3. Χρησιμοποιώντας ένα μεγάλο τρίγωνο, υπολογίζεται η κλίση της καμπύλης στο συγκεκριμένο σημείο. Κλίση = ΑΒ/ΒΓ

3.3 Διαμόρφωση μη γραμμικών σχέσεων σε γραμμικές

Κάποιες φορές η εξέλιξη των δεδομένων είναι δύσκολο να αντιστοιχηθεί με κάποια μαθηματική σχέση. Επειδή στο εργαστήριο λαμβάνουμε σχετικά λίγες μετρήσεις, δεν είναι πάντα εύκολο να αποφανθούμε για παράδειγμα κατά πόσον τα δεδομένα μας σχετίζονται με παραβολική ή εκθετική σχέση. Γιαυτό είναι πολύ χρήσιμο, οι μη γραμμικές σχέσεις, να διαμορφώνονται με τρόπο ώστε, να μπορούν να παρασταθούν με ευθεία (γραμμικοποίηση). Αυτό επιτυγχάνεται με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών. Με την «γραμμικοποίηση» μπορεί να ελεγχθεί πιο εύκολα αν η γραμμικοποιημένη σχέση ξεφεύγει από την γραμμική ή όχι. Επιπλέον μας επιτρέπει να υπολογίσουμε διάφορες παραμέτρους που εμπεριέχονται στις σχέσεις αυτές.

Παραδείγματα:

1. Έστω ότι θέλουμε να μετατρέψουμε τη σχέση $T = 2\pi\sqrt{\frac{L+\alpha}{g}}$ (που εκφράζει την περίοδο απλού εκκρεμούς σε συνάρτηση με το μήκος του) σε γραμμική. Αυτό μπορεί να γίνει υψώνοντας τη σχέση στο τετράγωνο και αναδιατάσσοντας τους όρους της προκύπτουσας εξίσωσης.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L+\alpha}{g}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2\left(\frac{L+\alpha}{g}\right) \Rightarrow L = \frac{g}{4\pi^2}T^2 - \alpha$$

Ενώ η σχέση T=f(L) είναι καμπύλη, η σχέση $L=f(T^2)$ είναι γραμμική της μορφής Y=AX+B. Θέτοντας ως μεταβλητές Y=L και $X=T^2$, η κλίση της ευθείας που προκύπτει, μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τη σταθερά g, ενώ το σημείο τομής της με τον κατακόρυφο άξονα μας δίνει την τιμή της παραμέτρου α. Επομένως ενώ τα μετρούμενα μεγέθη είναι το L και η T, για την χάραξη της ευθείας χρησιμοποιούμε τις νέες μεταβλητές L και T^2. Η παραπάνω σχέση θα μπορούσε να εκφραστεί και ως $T^2=f(L)$.

Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να διαμορφωθεί και η σχέση $T = 2\pi\sqrt{\frac{m+m_{\varepsilon\lambda}}{D}}$ (που εκφράζει την περίοδο T ενός συστήματος μάζας- ελατηρίου σε συνάρτηση με τη μάζα m και τη μάζα ελατηρίου $m_{\varepsilon\lambda}$).

2. Έστω ότι θέλουμε να μετατρέψουμε σε γραμμική, τη σχέση $I = I_o e^{-\mu\chi}$, που εκφράζει τη μεταβολή της έντασης ακτινοβολίας που διέρχεται μέσα από ένα υλικό με γραμμικό συντελεστή εξασθένισης **μ** ως συνάρτηση του πάχους **χ** του υλικού. Αυτό μπορεί να γίνει λογαριθμίζοντας την παραπάνω συνάρτηση.

$$I = I_o e^{-\mu\chi} \Rightarrow \ln I = \ln I_O - \mu\chi$$

Η σχέση I=f(χ) είναι καμπύλη, ενώ η σχέση lnI=f(χ) είναι γραμμική της μορφής Y=AX+B. Θέτοντας ως μεταβλητές Y=lnI και X=χ, η κλίση της ευθείας που προκύπτει, μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τον γραμμικό συντελεστή εξασθένισης του υλικού, ενώ το σημείο τομής της με τον κατακόρυφο άξονα δίνει την τιμή της ποσότητας $\ln I_o$, από την οποία μπορεί να υπολογιστεί η αρχική ένταση I_o. Επομένως ενώ τα μετρούμενα μεγέθη είναι το I και το **χ**, για την χάραξη της ευθείας χρησιμοποιούμε τις νέες μεταβλητές lnI και **χ**.

Περιληπτικά:

Για μια αποτελεσματική παρουσίαση των δεδομένων:

- Τα δεδομένα πρέπει να είναι καταχωρημένα σε πίνακες κοντά στη γραφική παράσταση.
- Επιλέγεται η κατάλληλη γραφική παράσταση για να αναπαρασταθούν τα δεδομένα μας, αναγράφεται ο τίτλος του γραφήματος και η σχέση που θα αναπαρασταθεί γραφικά.
- Επιλέγεται η κατάλληλη κλίμακα για τους άξονές. Η εξηρτημένη μεταβολή τοποθετείται στον κατακόρυφο άξονα και η ανεξάρτητη στον οριζόντιο μαζί με τις μονάδες τους.
- Σημειώνονται ευδιάκριτα (μικρές τελείες) τα πειραματικά σημεία πάνω στο γράφημα.
- Χαράσσεται η καλλίτερη ευθεία ή καμπύλη που περνά μέσα από τα πειραματικά σημεία.
- Στις γραμμικές σχέσεις, υπολογίζεται η κλίση και τα σημεία τομής με τους άξονες. Από την κλίση και τα σημεία τομής υπολογίζονται οι παράμετροι που μας ενδιαφέρουν, μαζί με τις μονάδες τους.

Βιβλιογραφία

1. «Γραφικές Παραστάσεις» από το βιβλίο, “Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής ΙΙ ” Ομάδα Φυσικών ΤΕΙ ΠΕΙΡΑΙΑ, (Μακεδονικές Εκδόσεις).
2. «Οδηγίες Εργαστηριακών Ασκήσεων» από το βιβλίο, “Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής Ι” Ομάδα Φυσικών ΤΕΙ Αθήνας, (Μακεδονικές Εκδόσεις).
3. John R. Taylor, «An Introduction to Error Analysis : The Study of Uncertainties in Physical Measurements», 2nd ed. (Univ. Science Books, 1997)

Φύλλο Εργασίας
Γραφικές Παραστάσεις

Οι γραφικές παραστάσεις γίνονται **πάντα** σε χιλιοστομετρικό (μιλιμετρέ) χαρτί και επικολλούνται στο τετράδιο κοντά στον αντίστοιχο πίνακα δεδομένων.

1. Παρακάτω δίδονται οι μετρήσεις ενός σπουδαστή που λήφθηκαν με σκοπό τον υπολογισμό της σταθεράς ενός ελατηρίου. Οι μεταβλητές B και x συνδέονται με τη σχέση $B = D \cdot x$. Να γίνει η γραφική παράσταση της σχέσης B=B(x) και να βρεθεί η τιμή της σταθεράς ελατηρίου D σε N/m ($1p = 10^{-2}$ N)

B (p)	x (cm)
0	0
50	1,6
100	3,0
150	4,4
200	5,9
250	7,3
300	8,7
350	10,3
400	11,0

2. Να διαμορφωθούν οι παρακάτω καμπύλες σε ευθείες και να υπολογισθούν από τη γραφική παράσταση των διαμορφωμένων παραμέτρων, οι άγνωστες σταθερές με τις μονάδες τους.

Υπόδειξη: Να γίνει αντιστοίχιση των διαμορφωμένων παραμέτρων να υπολογιστούν και να καταχωρηθούν στον πίνακα οι διαμορφωμένες ποσότητες.

(π.χ $N = N_o e^{-\lambda t} \rightarrow \ln N = \ln N_o - \lambda t \rightarrow Y = A - Bt$
$Y = \ln N$, $A = \ln N_o$ και κλίση $= B = \lambda$)

(α) $T = 2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{x+\alpha}{g}}$ όπου α και g είναι σταθερές.

x (cm)	T (s)
68,6	1,71
63,5	1,67
58,5	1,59
53,7	1,52
48,6	1,47
43,9	1,4
38,5	1,32
33,9	1,27
28,6	1,16
24,0	1,08

(β) $T = 2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{m + \dfrac{m_{\varepsilon\lambda}}{3}}{D}}$ όπου $m_{\varepsilon\lambda}$ και D είναι σταθερές.

m (kg)	T (s)
0,05	0,396
0,10	0,536
0,15	0,647
0,20	0,741
0,25	0,824
0,30	0,900
0,35	0,970
0,40	1,04
0,45	1,10
0,50	1,15

(γ) $I = I_0\, e^{-t/\tau}$ όπου I_0 και τ είναι σταθερές.

t min	I mA
0,0	25,0
0,5	20,3
1,0	16,0
1,5	13,3
2,0	10,5
2,5	8,5
3,0	7,0
3,5	5,5

3. Να χαραχθεί η καμπύλη (γ) I=f(t) και να βρεθεί η κλίση στο t=2 min.