ΑΥΤΟΜΑΤΙΣΤΕΣ ΦΥΣΙΚΗ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2010-2011

ΔΕΥΤΕΡΑ 12-2 ΑΙΘ.ΖΑ115-116

ΘΑ ΓΙΝΕΤΑΙ ΜΙΑ ΩΡΑ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΜΙΑ ΩΡΑ ΑΣΚΗΣΗ ΠΡΑΞΗΣ

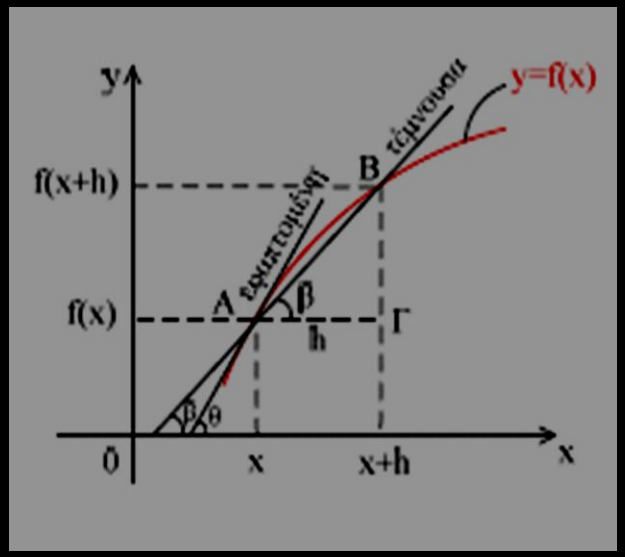
ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ-ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Ορισμός παραγώγου συνάρτησης σε σημείο

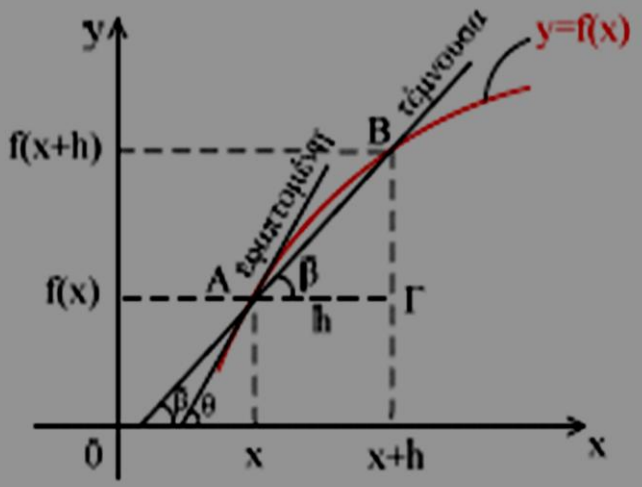
Μια συνάρτηση *f* (X) λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο** του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.



Στην ουσία ταυτίζεται με την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο χ



$$\tan\beta = \frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Όταν το h γίνεται σχεδόν μηδέν $(h \to 0)$, τότε το x+h πάει να ταυτιστεί με το x, το σημείο B της καμπύλης με το A και η τέμνουσα ευθεία με την εφαπτομένη της καμπύλης.
Αυτή η διαδικασία περιγράφεται με το όριο, που μας δίνει την έννοια της παραγώγου στη θέση x :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{με} \quad f'(x) = \tan\theta$$

Συμβολισμός

της παραγώγου για την συνάρτηση y=f(x):

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

Η παραγώγιση της f ΄(x) ως προς x, δίνει την **δεύτερη παράγωγο**:

$$f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

Φυσικά μεγέθη -Παράγωγος
(γιατί μας χρειάζεται)

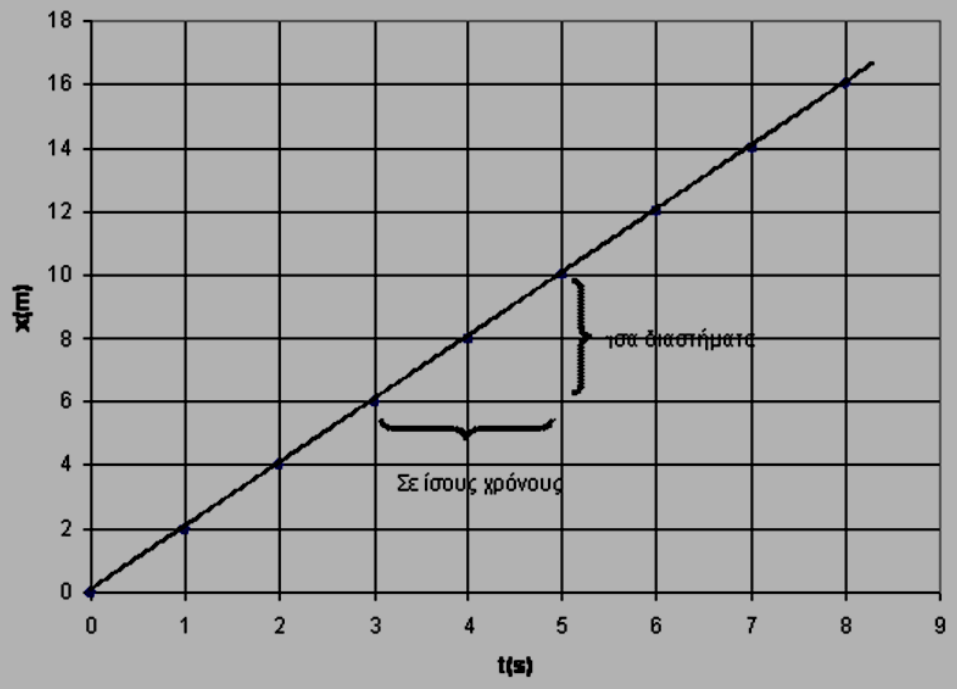
Η παράγωγος δίνει το ρυθμό μεταβολής ενός μεγέθους ως προς τον παράγοντα από τον οποίο εξαρτάται:

- Η ταχύτητα υ(t) είναι ο ρυθμός μεταβολής του διαστήματος ως προς το χρόνο
- Η επιτάχυνση α(t) είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ως προς το χρόνο
- Η ένταση ρεύματος I=dq/dt είναι ο είναι ο ρυθμός μεταβολής του φορτίου ως προς το χρόνο
- Η ισχύς P είναι ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας ως προς το χρόνο

Σταθερός ρυθμός μεταβολής

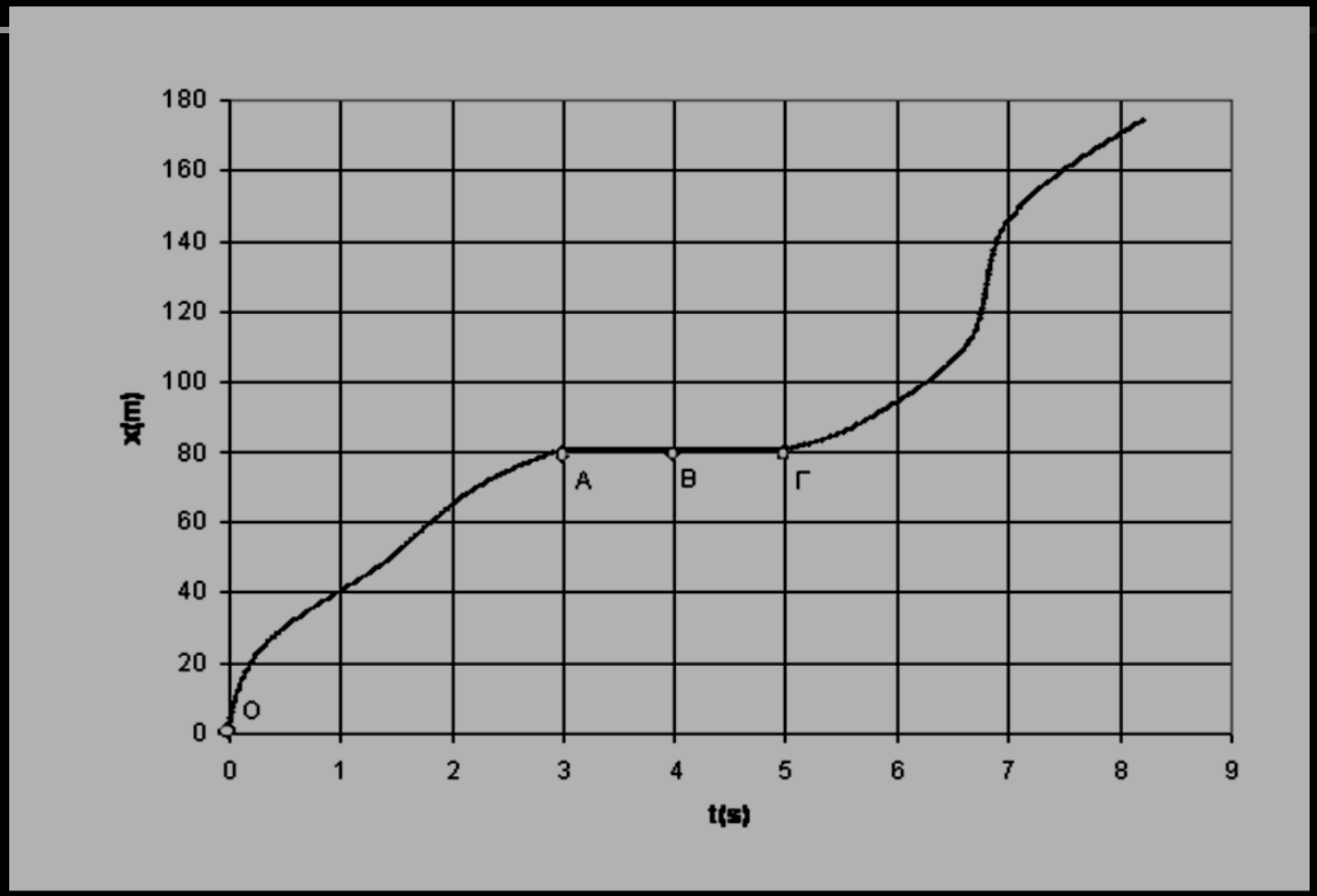
Σε ίσους χρόνους – ίσα διαστήματα

Κλίση ευθείας = ταχύτητα (σταθερή)



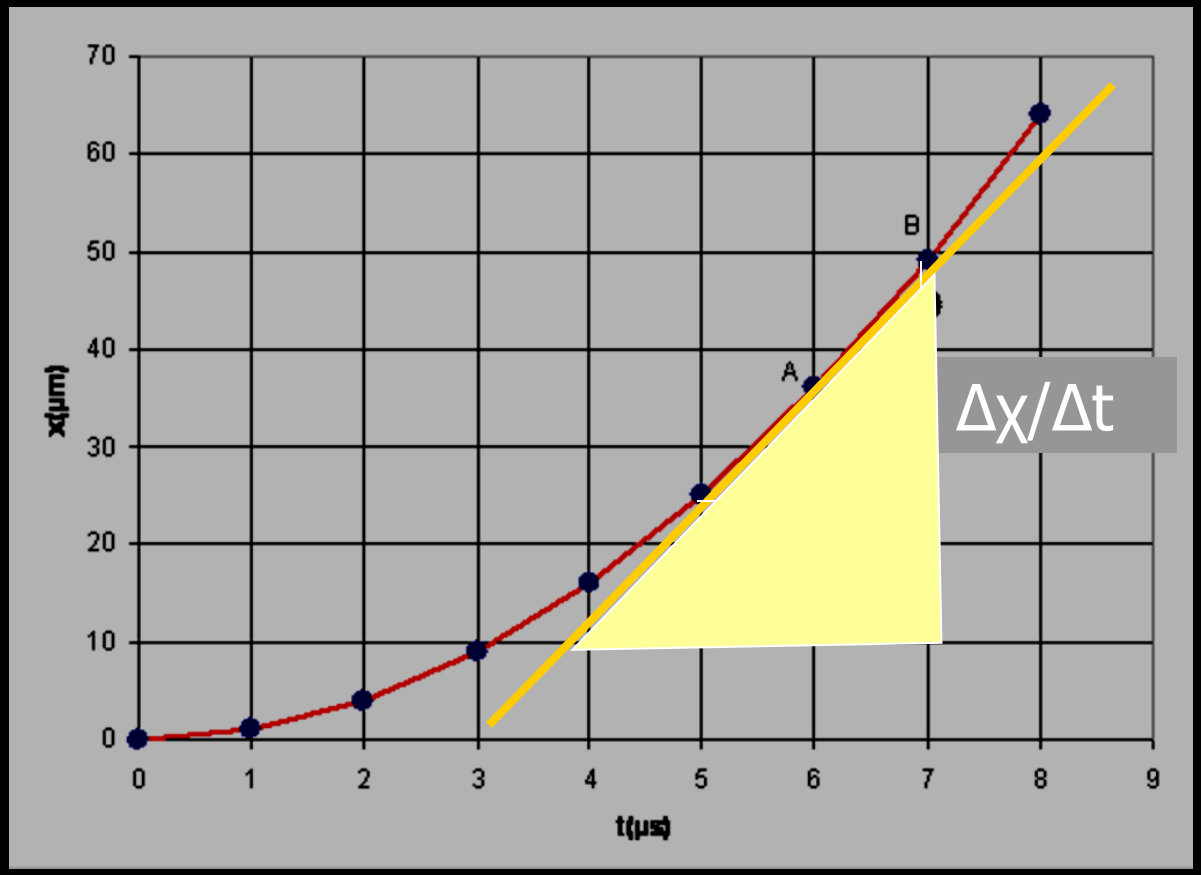
Σχήμα 1

Μεταβαλλόμενη κίνηση – Πως μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα σε κάποια χρονική στιγμή;



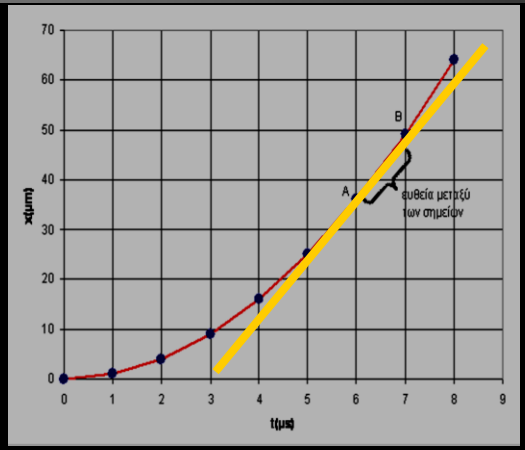
Ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

Χ(t):Η εφαπτόμενη της καμπύλης σε κάθε σημείο είναι διαφορετική και μας δίνει την τιμή της ταχύτητας στην αντίστοιχη χρονική στιγμή



Πως υπολογίζω παραγώγους

Π.χ $Y=x^2$



Γενίκευση $(X^v)' = v\,X^{v-1}$

Π.χ $Y=x^2$ **$Y'=2x$**

$Y=\chi 3$ $Y'=3\chi 2$

Πως υπολογίζω παραγώγους

$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$$

$$(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)$$

$$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Αν έχω σύνθετη συνάρτηση y=f(g(x))

Μπορώ να εφαρμόσω αλυσιδωτή παραγώγιση

Θέτω g(x)=u

Η παράγωγος της y=f(g(x)) είναι ίση με το γινόμενο των παραγώγων των συναρτήσεων της σύνθεσης:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{du}f(u)\frac{du}{dx}=\frac{d}{du}f(u)\frac{d}{dx}g(x)$$

Πχ. $Y=\eta\mu(\chi^2)$ $Y'=2X\,\sigma\upsilon\nu\,(\chi^2)$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ - ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Παράγωγοι:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}\sin ax = a\cos ax$$

$$\frac{d}{dx}\cos ax = -a\sin ax$$

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$$

$(c)' = 0$

$(x)' = 1$

$(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}, \quad \nu \in N^*$

$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (για κάθε $x > 0$)

$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

$(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

$(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$

$(e^x)' = e^x$

$([f(x)]^\nu)' = \nu\,[f(x)]^{\nu-1}.f'(x)$

$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}}f'(x) \quad f(x)>0$

$(\eta\mu f(x))' = \sigma\upsilon\nu f(x)\cdot f'(x)$

$(\sigma\upsilon\nu f(x))' = -\eta\mu f(x)\cdot f'(x)$

$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)}f'(x), \quad f(x) > 0$

$(\ln|f(x)|)' = \frac{1}{f(x)}f'(x)$

$(\varepsilon\varphi f(x))' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}\cdot f'(x)$

$(\sigma\varphi f(x))' = -\frac{1}{\eta\mu^2 f(x)}\cdot f'(x)$

$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)}\cdot f'(x)$

ΑΟΡΙΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Το αόριστο ολοκλήρωμα είναι το αντίθετο της παραγώγου. Έτσι εάν π.χ. η $F(x)$ είναι η παράγωγος της $f(x)$ (δηλαδή $F = df / dx$) τότε η $f(x)$ είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της $F(x)$. (παράδειγμα με $x^2/2$)

$F(x) = df / dx = x$ *τότε*

$$f(x) = \int F(x)\,dx = \int x\,dx = \frac{X^2}{2}$$

ΑΟΡΙΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Το αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης X είναι το $X^2 / 2$ Γεωμετρικά αυτό ισοδυναμεί με : ποια συνάρτηση στο σημείο χ έχει κλίση ίση με χ;

Αυτή είναι η συνάρτηση $f(\chi) = X^2 / 2$. Όμως για να είμαστε απολύτως ακριβείς πρέπει να προσθέσουμε και μια σταθερά, δηλαδή το αόριστο ολοκλήρωμα του χ είναι το $X^2 / 2 + c$ όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Αυτό γίνεται γιατί εάν μετατοπίσουμε μια καμπύλη κατά c, η κλίση της δεν αλλάζει. Γνωρίζουμε ότι η οικογένεια καμπυλών $X^2 / 2 + c$ έχουν όλες την ίδια κλίση.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΟΡΙΣΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

1.	$\int 0\,dx = c$		
2.	$\int 1\,dx = x + c$		$\int f'(x)\,dx = f(x) + c$
3.	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + c$		$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\lvert f(x)\rvert + c$
4.	$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ \alpha \neq -1$		$\int f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c,\ \alpha \neq -1$
5.	$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + c$		$\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\,dx = -\frac{1}{f(x)} + c$
6.	$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x} + c$		$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\,dx = \sqrt{f(x)} + c$
7.	$\int \sigma\upsilon\nu x\,dx = \eta\mu x + c$		$\int \sigma\upsilon\nu f(x)\cdot f'(x)\,dx = \eta\mu f(x) + c$
8.	$\int \eta\mu x\,dx = -\sigma\upsilon\nu x + c$		$\int \eta\mu f(x)\cdot f'(x)\,dx = -\sigma\upsilon\nu f(x) + c$
9.	$\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx = \varepsilon\varphi x + c$		$\int \frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}\,dx = \varepsilon\varphi f(x) + c$
10.	$\int \frac{1}{\eta\mu^2 x}\,dx = -\sigma\varphi x + c$		$\int \frac{f'(x)}{\eta\mu^2 f(x)}\,dx = -\sigma\varphi f(x) + c$
11.	$\int e^x\,dx = e^x + c$		$\int e^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$
12.	$\int \alpha^x\,dx = \frac{\alpha^x}{\ln\alpha} + c$		$\int \alpha^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx = \frac{\alpha^{f(x)}}{\ln\alpha} + c$

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι η διαφορά του αορίστου ολοκληρώματος σε δυο διαφορετικά σημεία t_1 και t_2. Συμβολίζεται ως εξής:

$$\int_{t1}^{t2} F(t)dt$$

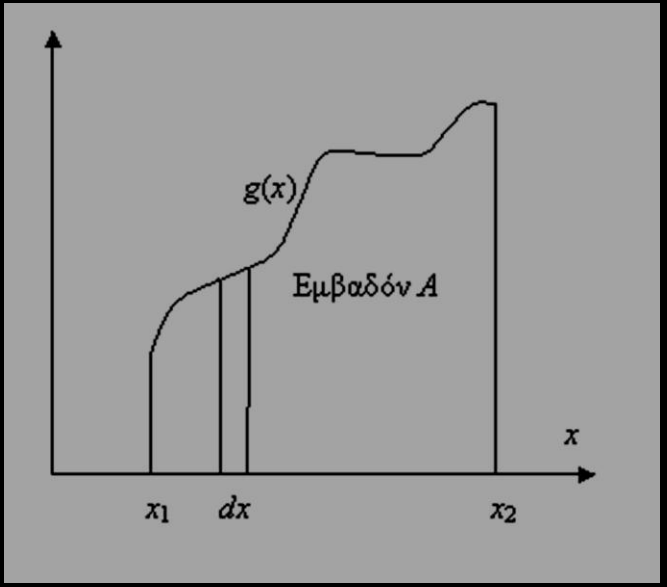
Έτσι εάν η $f(t)$ είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της $F(t)$, τότε

$$\int_{t1}^{t2} F(t)dt = f(t_2) - f(t_1)$$

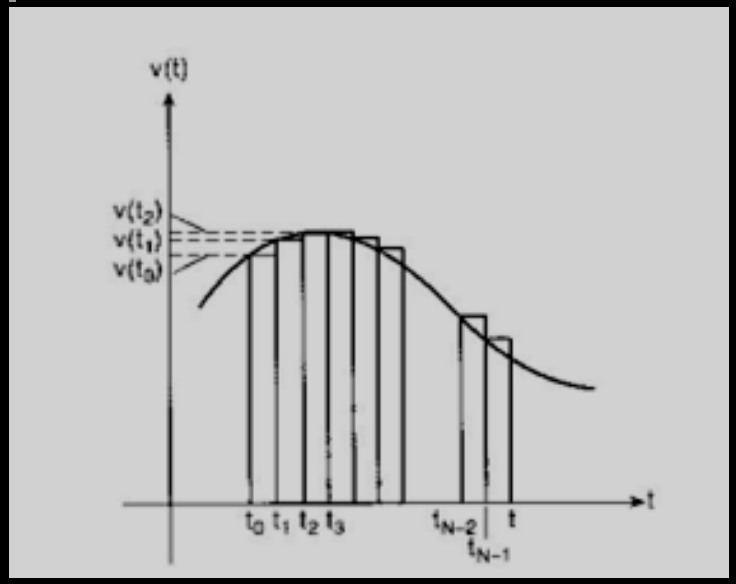
ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Η φυσική σημασία του ορισμένου ολοκληρώματος είναι ότι το A ισούται με το εμβαδόν ανάμεσα στην καμπύλη $g(x)$ και τον άξονα x μεταξύ των ορίων x_1 και x_2:

$$A = \int_{x1}^{x2} g(x)dx$$



ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ



$$x(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i}^{n} \upsilon(t)\delta t_i = \int_{t_o}^{t} \upsilon(t)dt$$

Γενικά

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i}^{n} f(t)\delta t_i = \int_{a}^{b} f(t)dt$$

Κανόνες ολοκλήρωσης

i. Ολοκλήρωμα μιας σταθεράς επί μία συνάρτηση:

$$\int_{\alpha}^{b} cf(u)\,du = c\int_{\alpha}^{b} f(u)\,du$$

Για παράδειγμα,

$$\int_{\alpha}^{b} 5u^2\,du = 5\int_{\alpha}^{b} u^2\,du = 5\left(\frac{b^3}{3} - \frac{\alpha^3}{3}\right)$$

ii. Ολοκλήρωμα αθροίσματος δύο συναρτήσεων:

$$\int_{\alpha}^{b} [f(u) + g(u)]\,du = \int_{\alpha}^{b} f(u)\,du + \int_{\alpha}^{b} g(u)\,du$$

Για παράδειγμα

$$\int_{\alpha}^{b} (5u^2 + u)\,du = \int_{\alpha}^{b} 5u^2\,du + \int_{\alpha}^{b} u\,du = 5\left(\frac{b^3}{3} - \frac{\alpha^3}{3}\right) + \left(\frac{b^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2}\right)$$

iii. Αλλαγή των ορίων της ολοκλήρωσης:

$$\int_{\alpha}^{b} f(u)\,du = \int_{\alpha}^{c} f(u)\,du + \int_{c}^{b} f(u)\,du$$

$$\int_{\alpha}^{b} f(u)\,du = -\int_{b}^{\alpha} f(u)\,du$$

Παραδείγματα

1. $$\int 4x^2 dx = 4\int x^2 dx = 4\frac{x^3}{3} + c$$

2. $$\int (3\eta\mu x - 2e^x)dx = \int 3\eta\mu x dx - \int 2e^x dx = 3\int \eta\mu x dx - 2\int e^x dx = -3\sigma\upsilon\nu x - 2e^x + c$$

3. $$\int \frac{3x-1}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{3x}{\sqrt{x}}dx - \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 3\int x^{\frac{1}{2}}dx - \int x^{-\frac{1}{2}}dx = 3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + c.$$