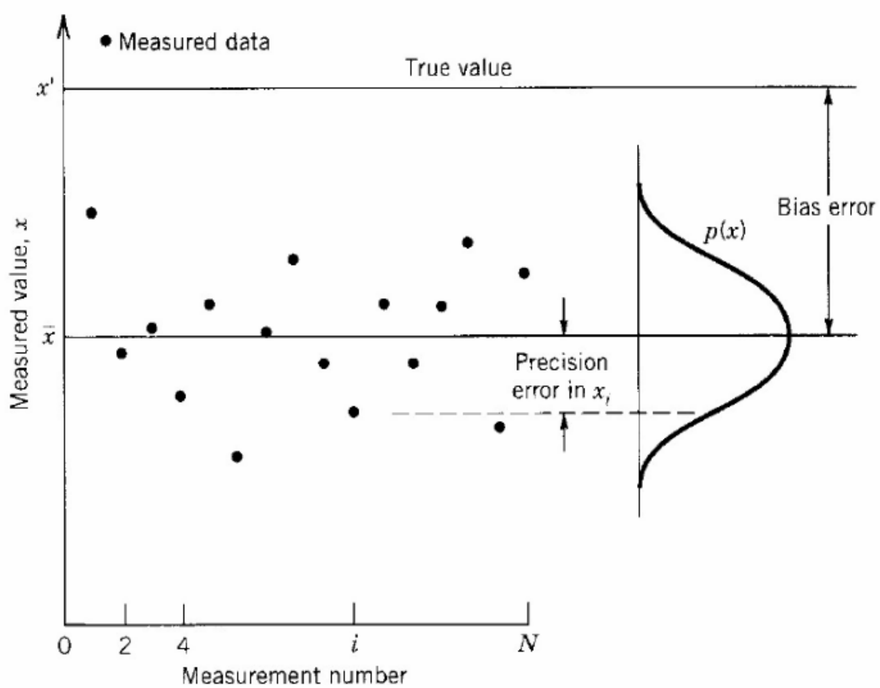
ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

- Σφάλμα μέτρησης είναι η διαφορά μεταξύ της πραγματικής τιμής της μεταβλητής και της μετρούμενης τιμής.
- Επειδή η πραγματική τιμή δεν είναι γνωστή, βρίσκουμε το *πιθανό σφάλμα* μέτρησης, το οποίο ονομάζεται *αβεβαιότητα*.
- Ορίζει ένα διάστημα γύρω απο τη μετρούμενη τιμή στο οποίο *υποψιαζόμαστε* ότι βρίσκεται η πραγματική τιμή.
- Η διαδικασία της ταυτοποίησης και του υπολογισμού των σφαλμάτων ονομάζεται ***ανάλυση αβεβαιότητας***.
- Τα σφάλματα ταξινομούνται συνήθως σε δύο πολύ γενικές κατηγορίες, σε συστηματικά και τυχαία σφάλματα.
- Και οι δύο αυτές κατηγορίες σφαλμάτων απεικονίζονται στο Σχήμα 5.1.



Σχήμα 5.1 Η κατανομή των σφαλμάτων σε επαναλαμβανόμενες μετρήσεις.

- Το συνολικό σφάλμα μιας μέτρησης είναι το άθροισμα του συστηματικού και του τυχαίου σφάλματος.

- Τα συστηματικά σφάλματα μετατοπίζουν τη μέση τιμή του δείγματος μακριά από την πραγματική μέση τιμή κατά μία προκαθορισμένη ποσότητα.

- Τα τυχαία σφάλματα οδηγούν σε κανονική κατανομή των μετρούμενων τιμών γύρω από τη μέση τιμή του δείγματος.

- Η καλύτερη εκτίμηση της πραγματικής τιμής είναι αυτή που προκύπτει από τη μέση τιμή του δείγματος και την αβεβαιότητα αυτής της τιμής:

$$x' = \overline{x} \pm u_x$$

Η ανάλυση αβεβαιότητας είναι η μέθοδος
που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του u_x.

- Κατά την ανάλυση αβεβαιότητας είναι αυτονόητες συγκεκριμένες υποθέσεις:

  1. Οι στόχοι των μετρήσεων είναι γνωστοί.
  2. Η μέτρηση αποτελεί συγκεκριμένη διαδικασία στην οποία όλες οι διορθώσεις των συστηματικών σφαλμάτων βαθμονόμησης έχουν ήδη ληφθεί υπόψη.
  3. Τα δεδομένα λαμβάνονται σε σταθερές συνθήκες λειτουργίας.
  4. Οι μηχανικοί έχουν εμπειρία με τα εξαρτήματα του συστήματος.

Ανάλυση Αβεβαιότητας στο Στάδιο της Σχεδίασης

- Η αβεβαιότητα στο στάδιο της σχεδίασης αφορά την ανάλυση που πραγματοποιείται πριν από τις μετρήσεις

- Αυτή η ανάλυση αβεβαιότητας χρησιμοποιείται για την επιλογή του εξοπλισμού και της διαδικασίας των μετρήσεων.

- Το αρχικό βήμα της ανάλυσης αβεβαιότητας στο στάδιο της σχεδίασης είναι ο υπολογισμός της ελάχιστης αβεβαιότητας της μετρούμενης τιμής που προκύπτει από τη μέτρηση.

- Ένα μετρητικό σύστημα αποτελείται από αισθητήρες και μετρητικά όργανα, καθένα από τα οποία συνεισφέρει στην αβεβαιότητα του συστήματος.

- Ακόμα και όταν όλα τα σφάλματα είναι μηδέν, η τιμή του μετρούμενου μεγέθους πρέπει να επηρεάζεται από τη διακριτική ικανότητα του μετρητικού οργάνου.

- Η αβεβαιότητα του οργάνου που οφείλεται στη διακριτική του ικανότητα λέγεται **αβεβαιότητα μηδενικής τάξεως**, u_0.

- Θεωρούμε, ότι για αβεβαιότητα μηδενικής τάξης, η μεταβολή του μετρούμενου μεγέθους είναι μικρότερη από αυτή που οφείλεται στη διακριτική ικανότητα του οργάνου.

- Με άλλα λόγια η u_0 αποτελεί εκτίμηση της αβεβαιότητας που οφείλεται στη διασπορά των δεδομένων κατά την ανάγνωση της ένδειξης του οργάνου.

- Ένας αυθαίρετος κανόνας για τον υπολογισμό της αριθμητικής τιμής της u_0 είναι το ½ της διακριτικής ικανότητας του οργάνου με πιθανότητα 95%:

$$u_0 = \pm\,(\text{διακριτική ικανότητα}/2) \quad (95\%)$$

- Θεωρούμε, ότι για πιθανότητα 95%, μόνο μία στις είκοσι τιμές μέτρησης θα είναι εκτός του διαστήματος που ορίζεται από το u_0.

- Το δεύτερο κομμάτι της αβεβαιότητας που αφορά το σφάλμα του οργάνου προσδιορίζεται από τον κατασκευαστή.

- Σε ένα κατάλογο του κατασκευαστή οι αβεβαιότητες που αναφέρονται, θεωρούνται ότι οφείλονται αποκλειστικά στο όργανο, u_c.

- Βασικά, η παραπάνω αβεβαιότητα εκφράζει το συστηματικό σφάλμα του οργάνου.

Συνδυασμός στοιχειωδών σφαλμάτων: Μέθοδος RSS

- Η μέθοδος της τετραγωνικής ρίζας του αθροίσματος των τετραγώνων των σφαλμάτων έχει καθιερωθεί για τον υπολογισμό της συνολικής επίδρασης περισσοτέρων του ενός σφαλμάτων (RSS).

- Κάθε στοιχειώδες σφάλμα συνδυάζεται κατά κάποιο τρόπο με άλλα στοιχειώδη σφάλματα για την αύξηση της αβεβαιότητας της μέτρησης.

- Θεωρήστε μια μέτρηση του x η οποία υπόκειται σε K στοιχειώδη σφάλματα, e_j, όπου j=1,2,…,K. Τότε ο υπολογισμός της συνολικής αβεβαιότητας δίδεται από τη σχέση :

$$u_x = \pm\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_K^2} = \pm\sqrt{\sum_{j=1}^{K} e_j^2} \quad (P\%)$$

- Ο γενικός κανόνας είναι να χρησιμοποιούμε 95% πιθανότητα σε όλους τους υπολογισμούς της αβεβαιότητας.

- Μολονότι το απλό αριθμητικό άθροισμα των στοιχειωδών σφαλμάτων δίνει μεγαλύτερη τιμή για το πιθανό σφάλμα της μέτρησης, η μέθοδος αυτή θεωρεί ότι όλα τα σφάλματα μπορούν να συμβούν με το χειρότερο δυνατό τρόπο για καθεμιά και για όλες τις μετρήσεις.

Αβεβαιότητα στο στάδιο της σχεδίασης

- Η αβεβαιότητα, u_d, στο στάδιο της σχεδίασης του μετρητικού οργάνου μπορεί να υπολογιστεί προσεγγιστικά συνδυάζοντας την αβεβαιότητα του οργάνου και την αβεβαιότητα μηδενικής τάξεως:

$$u_d = \sqrt{u_0^2 + u_c^2} \quad (P\%)$$

- Αν υπάρξουν περισσότερες πληροφορίες διαθέσιμες για τη μέτρηση, θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν για την τροποποίηση της παραπάνω εξίσωσης.

- Η συνολική αβεβαιότητα του μετρητικού συστήματος στο στάδιο της σχεδίασης προκύπτει συνδυάζοντας τις αβεβαιότητες στο στάδιο της σχεδίασης των επιμέρους εξαρτημάτων του συστήματος, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο RSS.

Παράδειγμα 1:

Ένα μικρόμετρο έχει χαραγμένες διαβαθμίσεις σε διαστήματα 0.001 in (0.025 mm). Υπολογίστε την αβεβαιότητα που οφείλεται στη διακριτική ικανότητα με πιθανότητα 95%.

Ζητούμενα: u_d με εμπιστοσύνη 95%

Υποθέσεις: Το σφάλμα του οργάνου είναι αμελητέο συγκριτικά με το σφάλμα της διακριτικής ικανότητας.

Λύση:

Το σφάλμα παρεμβολής που οφείλεται στη διακριτική ικανότητα του οργάνου ενός αναλογικού οργάνου είναι προσεγγιστικά το ½ της ελάχιστης αλλαγής της ένδειξής του:

$$u_0 = 0.0005 \text{ inch ή } 0.0125 \text{ mm}$$

Δεν είναι ασυνήθιστο για το συγκεκριμένο όργανο να έχει αμελητέο σφάλμα. Όμως, η ένδειξη μηδενικού πάχους μπορεί να ελεγχθεί με ακρίβεια μικρότερη της διακριτικής ικανότητας, έτσι

$$u_c \approx u_o$$

Τότε, η αβεβαιότητα στο στάδιο της σχεδίασης γίνεται :

$$u_d = \pm\sqrt{u_0^2 + u_c^2} = \pm 0.0007 \ \ inch \text{ ή } 0.0180 \text{ mm } (95\%)$$

Παράδειγμα 2:

Το ταχύμετρο ενός αυτοκινήτου έχει διαβάθμίσεις ανά 5 mph (8 km/hr) και ακρίβεια ± 4%. Υπολογίστε την αβεβαιότητα για ένδειξη ταχύτητας 60 mph (90 km/hr).

Ζητούμενα: u_d στα 60 mph (90 km/hr)

Λύση:

Η αβεβαιότητα στο στάδιο της σχεδίασης είναι:

$$u_d = \pm\sqrt{u_0^2 + u_c^2}$$

όπου

$$u_0 = \pm 2.5\, mph\ (4\, km/hr)$$

$u_c = \pm 4\%$ της ένδειξης = ±2.4 mph για ένδειξη 60 mph

Έτσι προκύπτει:

$$u_d = \pm\sqrt{2.5^2 + 2.4^2} = \pm 3.5\, mph\ (95\%) = \pm 4.5 (km/hr)\ (95\%)$$

Παράδειγμα 3:

Ένα σύστημα μέτρησης θερμοκρασίας αποτελείται από ένα ν αισθητήρα και μια συσκευή ένδειξης. Η συσκευή ένδειξης έχει ακρίβεια 0.8 ^{o}C με διακριτική ικανότητα 0.1 ^{o}C. Ο αισθητήρας έχει ακρίβεια 0.5 ^{o}C. Υπολογίστε την αβεβαιότητα στο στάδιο της σχεδίασης για τη θερμοκρασία που προκύπτει από το συνδυασμό αισθητήρα και συσκευής ένδειξης.

Δεδομένα: Αισθητήρας θερμοκρασίας
Όριο σφάλματος: ±0.5 ^{o}C
Συσκευή ένδειξης
Διακριτική ικανότητα : 0.1 ^{o}C
Ακρίβεια : 0.8 ^{o}C

Ζητούμενα: u_d

Λύση:

Η αβεβαιότητα στο στάδιο της σχεδίασης για το σύστημα είναι:

$$u_d = \pm\left[(u_d)_R^2 + (u_d)_S^2\right]^{1/2}$$

όπου $(u_d)_R$ είναι η αβεβαιότητα στο στάδιο της σχεδίασης της συσκευής ένδειξης και $(u_d)_S$ του αισθητήρα. Σε κάθε περίπτωση η αβεβαιότητα στο στάδιο της σχεδίασης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$u_d = \pm\sqrt{u_0^2 + u_c^2}$$

<u>Αισθητήρας:</u>

$u_0=0$ (δηλ. δεν υπάρχει βαθμίδα ένδειξης εξόδου, η ένδειξη είναι ξεχωριστή)
$u_c = \pm 0.5\ ^oC$

Σ' αυτή την περίπτωση, η διακριτική ικανότητα δεν έχει σχετική σημασία για τον αισθητήρα, αλλά μόνο για τη συσκευή εξόδου.

$$(u_d)_S = \sqrt{(0^2 + 0.5^2)} = 0.5\ ^oC$$

<u>Συσκευή ένδειξης:</u>

$u_0=0.05\ ^oC$ και $u_c=0.8\ ^oC$

$$(u_d)_R = \sqrt{(0.05^2 + 0.8^2)} = \pm 0.8\ ^oC$$

Έτσι η αβεβαιότητα στο στάδιο της σχεδίασης του σύνθετου συστήματος είναι:

$$u_d = \pm(0.05^2 + 0.8^2)^{1/2} = \pm 0.94\ ^oC$$

Πηγές σφαλμάτων

- Ένα απαραίτητο πρώτο βήμα στη σχεδίαση ενός μετρητικού συστήματος είναι η ανάλυση αβεβαιότητας στο στάδιο της σχεδίασης.
- Τα επόμενα τρία βήματα της ανάλυσης αβεβαιότητας είναι:
  1. Η ανάλυση των σφαλμάτων βαθμονόμησης.
  2. Η ανάλυση των σφαλμάτων ανάκτησης δεδομένων.
  3. Η ανάλυση των σφαλμάτων επεξεργασίας δεδομένων.
- Σε καθεμιά από αυτές τις ομάδες πηγών σφαλμάτων υπάρχουν πολλοί τύποι σφαλμάτων.
- Τέτοια σφάλματα είναι τα στοιχειώδη σφάλματα της μέτρησης.

- Αν ένα βήμα δεν περιλαμβάνεται στην πραγματική διαδικασία μέτρησης, τότε η ομάδα σφαλμάτων που αντιστοιχούν στο βήμα αυτό μπορεί να αποκλειστεί από την ανάλυση σφάλματος.

Σφάλματα βαθμονόμησης

- Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα πιο γνωστά στοιχειώδη σφάλματα που προκύπτουν στη διαδικασία βαθμονόμησης.

Πίνακας 5.1 Πιθανά σφάλματα που προκύπτουν κατά τη βαθμονόμηση ενός μετρητικού συστήματος

Είδος (j)	Πηγή σφάλματος[a]
1	Διαφορά μεταξύ θεμελιώδους και εθνικού προτύπου
2	Διαφορά μεταξύ εθνικού και μεταβιβαζομένου προτύπου
3	Διαφορά εθνικού μεταβιβαζομένου και εργαστηριακού προτύπου
4	Διαφορά εργαστηριακού προτύπου και μετρητικού συστήματος
5	Διαδικασία βαθμονόμησης
άλλα	

[a] Συστηματικά ή /και τυχαία σφάλματα για κάθε πηγή.

Τα σφάλματα βαθμονόμησης οφείλονται σε δύο βασικές πηγές:

1. Στα τυχαία και συστηματικά σφάλματα του προτύπου που χρησιμοποιείται κατά τη βαθμονόμηση.
2. Στον τρόπο με τον οποίο εφαρμόζεται το πρότυπο στο μετρητικό σύστημα ή στα εξαρτήματά του.

Σφάλματα Κατά τη Συλλογή Δεδομένων

- Όλα τα σφάλματα που προκύπτουν κατά τη διάρκεια της μέτρησης ονομάζονται *σφάλματα συλλογής (ανάκτησης) δεδομένων*.
- Μερικά από αυτά τα στοιχειώδη σφάλματα δίδονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 5.2 Σφάλματα που προκύπτουν κατά την ανάκτηση δεδομένων.

Είδος j	Πηγή σφάλματος[a]
1	Συνθήκες λειτουργίας μετρητικού συστήματος
2	Βαθμίδα αισθητήρα-μετατροπέα (σφάλμα οργάνου)
3	Βαθμίδα μορφοποίησης σημάτων (σφάλμα οργάνου)
4	Βαθμίδα εξόδου (σφάλμα οργάνου)
5	Συνθήκες φυσικής διεργασίας (πειράματος)
6	Επιδράσεις λόγω της τοποθέτησης των αισθητήρων
7	Περιβαλλοντικές επιπτώσεις
8	Σφάλμα λόγω χωρικών μεταβολών
9	Σφάλμα λόγω χρονικών μεταβολών

άλλα	

[a] Συστηματικά ή /και τυχαία σφάλματα για κάθ ε πηγή.

Σφάλματα επεξεργασίας δεδομένων

- Χρησιμοποιώντας καμπύλες προσαρμογής και συσχέτισης κατά την ανάλυση των δεδομένων προκύπτουν σφάλματα στα παρουσιαζόμενα αποτελέσματα.

- Τυπικά στοιχειώδη σφάλματα που προκύπτουν κατά την ανάλυση των δεδομένων δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 5.3 Σφάλματα που προκύπτουν κατά την επεξεργασία των δεδομένων

Είδος (j)	Πηγή σφάλματος[a]
1	Προσαρμογή καμπύλης στα δεδομένα βαθμονόμησης
2	Σφάλμα αποκοπής
άλλα	

[a] Συστηματικά ή /και τυχαία σφάλματα για κάθε πηγή.

Συστηματικά και Τυχαία Σφάλματα

- Γενικός κανόνας: ένα σφάλμα είναι τυχαίο αν μπορεί να υπολογιστεί στατιστικά, διαφορετικά είναι συστηματικό σφάλμα.

Συστηματικό σφάλμα

- Ένα συστηματικό σφάλμα παραμένει συνήθως σταθερό κατά τη διάρκεια σειράς μετρήσεων σε σταθερές συνθήκες λειτουργίας.

- Είναι δύσκολος ο υπολογισμός του συστηματικού σφάλματος ή η αναγνώριση της ύπαρξής του.

- Η εκτίμηση του συστηματικού σφάλματος εκφράζεται από ένα όριο, $\pm B$, μια περιοχή τιμών μέσα στην οποία ενδέχεται να βρίσκεται η πραγματική τιμή.

- Το συστηματικό σφάλμα μπορεί να υπολογιστεί μόνο μέσω σύγκρισης χρησιμοποιώντας διάφορες μεθοδολογίες, όπως:

  1. Βαθμονόμηση
  2. Παράλληλες (εναλλακτικές) μεθόδους
  3. Συγκρίσεις εργαστηρίων
  4. Εμπειρία.

- Η βαθμονόμηση με τη χρήση προτύπων είναί η ποιο άμεση μέθοδος για την εκτίμηση του συστηματικού σφαλματος, αλλά δεν μπορεί να το εξαλείψει παρά μόνο να το μειώσει.

Τυχαίο Σφάλμα

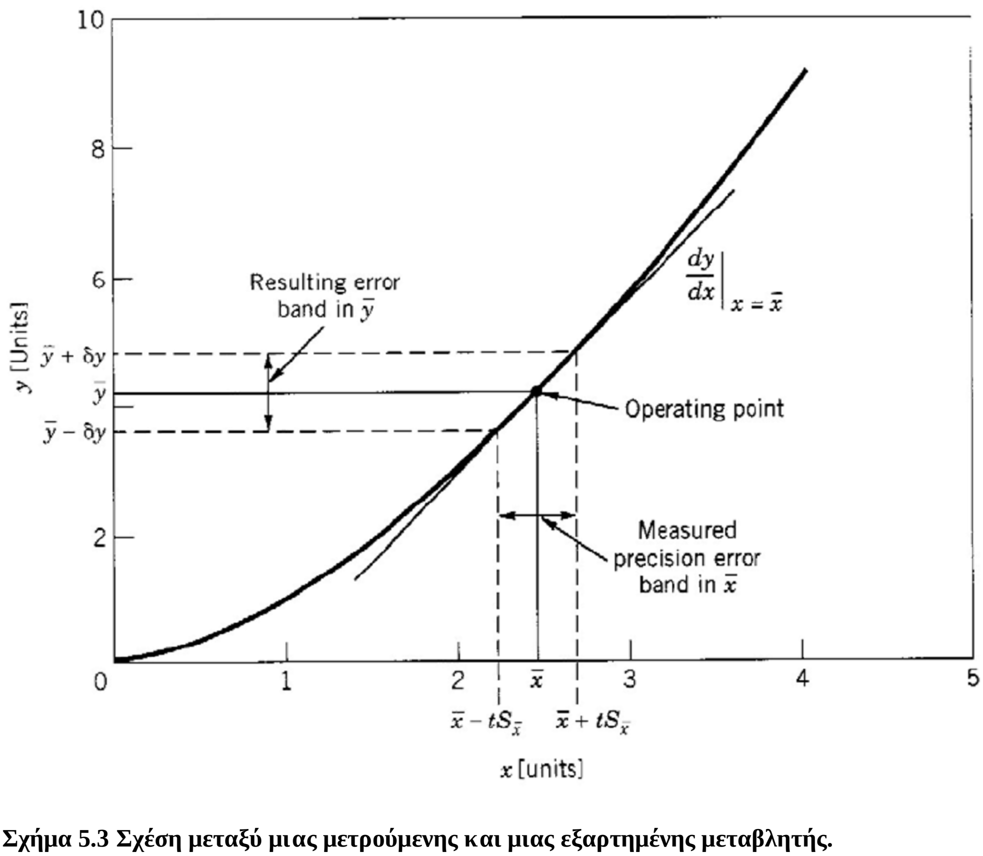
- Τα τυχαία σφάλματα παρουσιάζονται ως αποτέλεσμα της διασποράς των μετρούμενων δεδομένων
- Τα τυχαία σφάλματα προκύπτουν από:

1. Το μετρητικό σύστημα – **επαναληψημότητα και διακριτική ικανότητα**.
2. Τη μετρούμενη μεταβλητή – **χρονικές και χωρικές μεταβολές**.
3. Τη διεργασία – **μεταβολές των συνθηκών λειτουργίας και περιβάλλοντος.**
4. Τη διαδικασία και τεχνική μέτρησης – **επαναληψημότητα**.

Ανάλυση αβεβαιότητας: Μετάδοση σφάλματος

Μετάδοση σφάλματος

- Μια γενική σχέση μεταξύ μιας εξαρτημένης και μιας μετρούμενης μεταβλητής παρουσιάζεται στο παρακάτω Σχήμα 5.3.



Σχήμα 5.3 Σχέση μεταξύ μιας μετρούμενης και μιας εξαρτημένης μεταβλητής.

- Υποθέστε ότι μετράμε το x αρκετές φορές σε δεδομένες συνθήκες λειτουργίας για να υπολογίσουμε τη μέση τιμή του δείγματος και την τυχαία αβεβαιότητα της μέσης τιμής, $\pm t_{\nu,P} S_{\bar{x}}$. .

- Υποθέστε ότι η πραγματική τιμή του y που προσδιορίζεται από τη μετρούμενη τιμή του x, βρίσκεται στο ακόλουθο διάστημα:

$$\bar{y} \pm \delta y = f(\bar{x} \pm t S_{\bar{x}})$$

- Αναπτύσσοντας την παραπάνω έκφραση σε σειρά Taylor προκύπτει:

$$\bar{y} \pm \delta y = f(\bar{x}) \pm \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=\bar{x}} \cdot t S_{\bar{X}} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=\bar{x}} \cdot \left(t S_{\bar{X}} \right)^2 + \dots \right]$$

- Έτσι, το δy για γραμμική προσέγγιση γίνεται:

$$dy \approx \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=\bar{x}} \left(t S_{\bar{X}} \right)$$

- Επομένως, η αβεβαιότητα του x σχετίζεται με την αβεβαιότητα του y μέσω της σχέσης:

$$u_y \approx \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x-\bar{x}} u_x$$

- Η ιδέα αυτή μπορεί να επεκταθεί και σε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών:

$$R = f_1 \left[x_1, x_2, \dots, x_L \right]$$

όπου L είναι ο αριθμός
των ανεξάρτητων μεταβλητών

- Η καλύτερη εκτίμηση της πραγματικής μέσης τιμής, R’, είναι:

$$R' = \bar{R} \pm u_R \ (P\%)$$

όπου η μέση τιμή του R βρίσκεται από τη σχέση:

$$\bar{R} = f_1 \left[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_L \right] \text{ και}$$

η αβεβαιότητα του $\bar{R}$ βρίσκεται από την σχέση:

$$u_R = f_2 \left[u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_L} \right]$$

- Ένας γενικός κανόνας είναι να εκτιμούνται οι αβεβαιότητες με το ίδιο επίπεδο εμπιστοσύνης, 95%.

- Η εκτίμηση του u_R είναι αυτή που προκύπτει από τη σχέση των Kline-McClintock:

$$u_R = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{L}\left(\theta_i u_{x_i}\right)^2}$$

όπου:

$$\theta_i = \left(\frac{\partial R}{\partial x_i}\right)_{x-\bar{x}} \quad i = 1,2,\ldots,L$$

Μέθοδος Ακολουθίας Διαταραχών

- Μια αριθμητική προσέγγιση μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για να υπολογιστεί η επίδραση της αβεβαιότητας των ανεξάρτητων μεταβλητών στην αβεβαιότητα της εξηρτημένης μεταβλητης.

- Εάν η εύρεση των μερικών παραγώγων είναι δύσκολη ή ο αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών μεγάλος τότε η καλύτερη μέθοδος εύρεσης της αβεβαιότητας της εξηρτημένης μεταβλητής είναι μέσω της μεθόδου των διαδοχικών διαταραχών.

- Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί τη μέθοδο των πεπερασμένων–διαφορών για την προσέγγιση των παραγώγων και περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα:

1. Υπολογισμός του αποτελέσματος $R_0 = f(x_1, x_2, ..., x_L)$. Η τιμή αυτή καθορίζει το σημείο της αριθμητικής προσέγγισης.

2. Αύξηση της ανεξάρτητης μεταβλητής με το ποσό της αντίστοιχης αβεβαιότητας και επανα-υπολογισμός του αποτελέσματος βασιζόμενοι σε κάθε μία από αυτές τις τιμές, R_i^+:

$$
\begin{aligned}
R_1^+ &= f\left(x_1 + u_{x_1}, x_2, ... x_L\right) \\
R_2^+ &= f\left(x_1, x_2 + u_{x_2}, ..., x_L\right) \\
&... \\
R_L^+ &= f\left(x_1, x_2, ..., x_L + u_{x_L}\right)
\end{aligned}
$$

3. Επανάληψη του προηγούμενου βήματος ελαττώνοντας κάθε φορά τις ανεξάρτητες μεταβλητές με το ποσό της αντίστοιχης αβεβαιότητας υπολογίζοντας έτσι τις τιμές R_i^-.

4. Υπολογισμός των διαφορών $\delta R_i^+ = R_i^+ - R_0$ και $\delta R_i^- = R_i^- - R_0$ για όλες τις ανεξάρτητες μεταβλητές: $i = 1, 2, ..., L$

5. Εκτίμηση της συμβολής της αβεβαιότητας κάθε ανεξάρτητης μεταβλητής στη συνολική αβεβαιότητα.

$$\delta R_i = \frac{\left|\delta R_i^+\right| + \left|\delta R_i^-\right|}{2} \approx \theta_i u_i$$

- Έτσι η αβεβαιότητα του αποτελέσματος είναι:

$$u_R = \pm\left[\sum_{i=1}^{L}\left(\delta R_i\right)^2\right]^{1/2} \quad (P\%)$$

Παράδειγμα 4:

Η πυκνότητα ενός μεταλλικού κράματος θα προσδιοριστεί από τη μάζα μιας κυλινδρικής ράβδου. Ο όγκος της ράβδου υπολογίζεται από μετρήσεις της δ ιαμέτρου και του μήκους. Εκτιμάται ότι η μάζα, m, μπορεί να είναι 0.1lb χρησιμοποιώντας έναν ζυγό ισορροπίας: μήκους, L, 0.05in και διαμέτρου, D, 0.0005in. Υπολογίστε την αβεβαιότητα μηδενικής τάξεως κατά την εκτίμηση της πυκνότητας. Ποια μέτρηση συμβάλει περισσότερο στην αβεβαιότητα της πυκνότητας; Ποια μέτρηση των παραπάνω τριών μεγεθών πρέπει να βελτιωθεί πρώτον, εάν η αβεβαιότητα της πυκνότητας δεν είναι αποδεκτή;
Χρησιμοποιήστε ονομαστικές τιμές m=4.5lb, L=6in, D=4in.

Δεδομένα:

Η πυκνότητα μεταλλικού κράματος καθορίζεται από τη μάζα της κυλινδρικής ράβδου.
Ονομαστικές τιμές κυλινδρικής ράβδου.

$m \approx 4.5\, lb_m \qquad (u_0)_m = 0.1\ lb_m = u_m$

$L \approx 6\ in \qquad (u_0)_L = 0.05\ in = u_L$

$D \approx 4\ in \qquad (u_0)_D = 0.0005\ in = u_D$

Ζητούμενα: $(u_0)_R$

Λύση:

$$V = \pi D^2 L / 4$$

$$\rho = m / V = 4m / \pi D^2 L$$

$$(u_0)_\rho = \pm\left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial m}u_m\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial D}u_D\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial L}u_L\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= \pm\left[\left(\frac{4}{\pi D^2 L}u_m\right)^2 + \left(\frac{-8m}{\pi D^3 L}u_D\right)^2 + \left(\frac{4m}{\pi D^2 L}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= \pm 0.0013\ lb_m / in^3 = \pm 2.24\ lb_m\ /\ ft^3$$

Η μέτρηση της μάζας συνεισφέρει περισσότερο στην εκτίμηση της αβεβαιότητας τη ς πυκνότητας και πρέπει να βελτι ωθεί πρώτον η μέτρησή της για την ελάττωση της αβεβαιότητας της πυκνότητας.

Παράδειγμα 5:

Η καταναλισκόμενη ισχύς ενός ηλεκτρικού θερμαντήρα προσδιορίζεται μ έσω της μέτρησης της αντίστασής του και της πτώσης τάσης. Η αντίσταση μετριέται με ωμόμετρο διακριτικής ικανότητας 1 Ω και ακρίβειας 1% της ένδειξης και η τάση με βολτόμετρο διακριτικής ικανότητας 1 V και ακρίβειας 1% της ένδειξής του. Ο θερμαντήρας αναμένεται να έχει αντίσταση 100 Ω και να καταναλίσκει ισχύ 100 W.. Προσδιορίστε την αβεβαιότητα της καταναλισκόμενης ισχύος σε επίπεδο μηδενικής τάξης (λόγω της διακριτικής ικανότητας των μετρήσεων μόνον) και στο στάδιο της σχεδίασης.

Δεδομένα:

$P=E^2/R$

R≈100Ω P≈100W

Ωμόμετρο

Ανάλυση: 1Ω

Σφάλμα: 1% της ένδειξης

Βολτόμετρο

Ανάλυση: 1V

Σφάλμα: 1% της ένδειξης

Ζητούμενα: u_0 και u_d της ισχύος

Λύση:

Χρησιμοποιώντας $E = [(100\Omega)(100W)]^{1/2} = 100\ V$

Η αβεβαιότητα μηδενικής τάξεως είναι:

$(u_0)_E = \pm 0.5V$

$(u_0)_R = \pm 0.5\Omega$

$$(u_0)_P = \left[\left(\frac{\partial P}{\partial E}(u_0)_E\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial R}(u_0)_R\right)^2\right]^{1/2} = \pm\left[\left(\frac{2E}{R}(u_0)_E\right)^2 + \left(\frac{-E^2}{R^2}(u_0)_R\right)^2\right]^{1/2}$$

$= \pm 1.12\ W\ (95\%)$

Αβεβαιότητα στο στάδιο της σχεδίασης:

$u_d = \left[u_0^2 + u_c^2\right]^{0.5}$

$(u_C)_E = 1V$

$(u_C)_R = 1\Omega$

$(u_d)_E = \left[0.5^2 + 1^2\right]^{0.5} = 1.12V$

$(u_d)_R = \left[0.5^2 + 1^2\right]^{0.5} = 1.12\Omega$

$$(u_d)_P = \pm\left[\left(\frac{2E}{R}(u_d)_E\right)^2 + \left(\frac{-E^2}{R^2}(u_0)_R\right)^2\right]^{1/2} = \pm 2.5\ W\ (95\%)$$

Σχόλιο:
Η αβεβαιότητα ενημερώνεται με κάθε νέα πληροφορία που προστίθεται στην ανάλυση.

<u>Παράδειγμα 6:</u>

Η ισχύς μιας θερμαντικής λωρίδας συνεχούς ρεύματος μπορεί να καθοριστεί με έναν από τους δύο τρόπους υπολογισμού της ισχύος: (1) από την ταυτόχρονη μέτρηση της αντίστασης και της πτώσης τάσης, ή (2) την ταυτόχρονη μέτρηση της πτώσης τάσης και της έντασης του ρεύματος στη λωρίδα. Τα χαρακτηριστικά των μετρητικών συσκευών είναι:

Όργανο Μέτρησης	Διακριτική Ικανότητα	Σφάλμα (% της ένδειξης)
Ωμόμετρο	1 Ω	0.5
Αμπερόμετρο	0.5 *A*	1
Βολτόμετρο	1 *V*	0.5

Χρησιμοποιήστε την ανάλυση αβεβαιότητας για να επιλέξτε ποια εκ των παραπάνω μεθόδων είναι η καλύτερη για τη μέτρηση των ονομαστικών τιμών ισχύος: 10 W, 1 kW, και 10 kW, αντίστοιχα; Υποθέστε τις αναγκαίες ονομαστικές τιμές αντίστασης, έντασης ρεύματος και τάσης.

Δεδομένα:

P=10, 1000, 10000W

$P=E^2/R$ ή P =IE

Τα χαρακτηριστικά του οργάνου δίνονται στον παραπάνω πίνακα.

Ζητούμενα: Επιλέξτε την καλύτερη μέθοδο με βάση την ανάλυση αβεβαιότητας.

Λύση:

Αυτό το πρόβλημα είναι ανοικτό και η επίλυσή του προσφέρεται ως οδηγός.

Υποθέτουμε E=100W. Αυτό καθορίζει το R και το I για την ανάλυση.

$$(u_d)_E = \left[0.5^2 + (0.005\times E)^2\right]^{0.5}$$
$$(u_d)_A = \left[0.25^2 + (0.01\times I)^2\right]^{0.5}$$
$$(u_d)_R = \left[0.5^2 + (0.005\times R)^2\right]^{0.5}$$

Πρώτη Μέθοδος: $P=E^2/R$

$$(u_d)_R = \pm\left[\left(\frac{\partial P}{\partial E}(u_d)_E\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial R}(u_d)_R\right)^2\right]^{1/2}$$

$$(u_d)_P / P = \pm\left[\left(\frac{2}{E}(u_d)_E\right)^2 + \left(\frac{(u_d)_R}{R}\right)^2\right]^{1/2}$$

P	E	R	u_P/P
W	V	Ω	%
10	100	1000	1.5
1000	100	10	2.9
10000	100	1	50.0

Δεύτερη Μέθοδος: P=EI

$$(u_d)_P = \pm\left[\left(\frac{\partial P}{\partial I}(u_d)_I\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial E}(u_d)_E\right)^2\right]^{1/2}$$

$$(u_d)_P / P = \pm\left[\left(\frac{2(u_d)_I}{I}\right)^2 + \left(\frac{(u_d)_E}{E}\right)^2\right]^{1/2}$$

P	E	I	u_P/P
W	V	A	%
10	100	0.1	250
1000	100	10	2.8
10000	100	100	1.3

Η μέθοδος 1 είναι καλύτερη για χαμηλά επίπεδα ισχύος ενώ η 2 για υψηλά επίπεδα.

Ανάλυση αβεβαιότητας σε προηγμένο στάδιο για μονή μέτρηση

- Στην ανάλυση αβεβαιότητας στο στάδιο της σχεδίασης λαμβάνονται υπόψη μόνο τα σφάλματα που οφείλονται στη διακριτική ικανότητα του μετρητικού συστήματος και σε εγγενή σφάλματα.

- Η ανάλυση αβεβαιότητας μονής μέτρησης επιτρέπει την εκτίμηση των σφαλμάτων διαδικασίας και ελέγχου που επηρεάζουν τη μέτρηση.

- Θα εξετάσουμε μια μέθοδο για ενδελεχή ανάλυση της αβεβαιότητας όταν υπάρχει στη διάθεσή μας ένα πολύ μικρό δείγμα δεδομένων.

- Αυτή η ανάλυση αβεβαιότητας σε προηγμένο στάδιο σχεδίασης ονομάζεται <u>ανάλυση αβεβαιότητας μονής μέτρησης</u>.

- Η ανάλυση αυτή χρησιμοποιείται:

    1. Στο προηγμένο στάδιο σχεδίασης μιας δοκιμής για τον υπολογισμό της αβεβαιότητας πέραν της αρχικής εκτίμησης στο στάδιο της σχεδίασης.

    2. Για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων μιας δοκιμής που αφορά μετρήσεις μιας ή περισσότερων παραμέτρων με ελάχιστα δεδομένα σε καθεμιά από τις συνθήκες του πειράματος.

- Ο στόχος είναι η εκτίμηση της αβεβαιότητας μιας μετρούμενης τιμής, x, ή ενός γενικού αποτέλεσματος, R, μέσω της εκτίμησης της αβεβαιότητας για κάθε παράγοντα που μπορεί να επηρεάζει το x ή το R.

- Παρουσιάζεται παρακάτω μια τεχνική που χρησιμοποιεί βήμα προς βήμα προσέγγιση για την ταυτοποίηση και εκτίμηση των σφαλμάτων.

<u>Αβεβαιότητα μηδενικής τάξεως</u>

- Στην αβεβαιότητα μηδενικής τάξεως, όλες οι μεταβλητές και οι παράμετροι που επηρεάζουν το αποτέλεσμα της μέτρησης, συμπεριλαμβανομένου και του χρόνου, θεωρούνται σταθερές εκτός από τη φυσική πράξη της παρατήρησης.

- Η τιμή u_0, η αβεβαιότητα στο στάδιο της σχεδίασης, εκτιμά το εύρος της αναμενόμενης μεταβολής της μετρούμενης τιμής όταν όλοι οι παράγοντες που την επηρεάζουν είναι ελεγχόμενοι.

- Σε αυτό το επίπεδο, η υπολογιζόμενη τιμή της αβεβαιότητας είναι η ελάχιστη δυνατή γιατί η ανάλυση μηδενικής τάξεως παρέχει εκτίμηση μόνο της επίδρασης της διακριτικής ικανότητας του οργάνου στη μέτρηση.

Αβεβαιότητα Υψηλής Τάξεως

- Η εκτίμηση της αβεβαιότητας υψηλής τάξεως εξετάζει την ικανότητα ελέγχου των συνθηκών λειτουργίας μιας δοκιμής.
- Για παράδειγμα, στο επίπεδο πρώτης τάξεως, μπορεί να ληφθεί υπόψη η επίδραση του χρόνου ως εξωγενής μεταβλητή της μέτρησης.
- Η αβεβαιότητα πρώτης τάξεως κάποιου μεγέθους μπορεί να εκ τιμηθεί ως εξής:

$$u_1 = \pm t_{\nu,95} S_x$$

για δείγμα δεδομένων που ελήφθη σε καθορισμένες συνθήκες λειτουργίας.

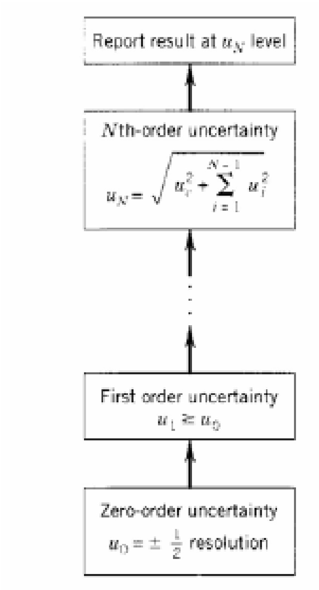
- Η αβεβαιότητα πρώτης τάξεως είναι ανεπαρκής για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων μιας δοκιμής.
- Σ κάθε διαδοχική τάξη λαμβάνονται υπόψη επιπλέον παράγοντες που επηρεάζουν τη μετρούμενη τιμή, δίνοντας έτσι μια πιο ρεαλιστική εκτίμηση της αβεβαιότητας.

Νιοστής τάξεως αβεβαιότητα

- Στην εκτίμηση της αβεβαιότητας νιοστής τάξεως, τα χαρακτηριστικά της βαθμονόμησης του οργάνου εισάγονται μέσω της αβεβαιότη τας του οργάνου, u_c.
- Μια πρακτική εκτίμηση της αβεβαιότητας, u_N, δίνεται από τον τύπο:

$$u_N = \sqrt{u_c^2 + \sum_{i=1}^{N=1} u_i^2}$$

- Η εκτίμηση της αβεβαιότητας νιοστής τάξης επιτρέπει απευθείας σύγκριση των αποτελεσμάτων παρόμοιων δοκιμών που επιτυγχάνονται είτε χρησιμοποιών τας διαφορετικά όργανα, είτε διαφορετικ ές εγκαταστάσεις δοκιμών.
- Έτσι, η εκτίμηση της αβεβαιότητας νιοστής τάξεως δίνει την τιμή της αβεβαιότητας σε προχωρημένο στάδιο της σχεδίασης ή την ανάλυση μονής μέτρησης.
- Η διαδικασία της ανάλυσης μονής μέτρησης δίν εται στο σχήμα 5.4.



Σχήμα 5.4 Διαδικασία για το συνδυασμό αβεβαιοτήτων σε προηγμένο στάδιο μονής μέτρησης.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

- Στην ενότητα αυτή αναπτύσσεται μια μέθοδος υπολογισμού της αβεβαιότητας μιας μετρούμενης μεταβλητής, με βάση δείγμα δεδομένων υπό σταθερές συνθήκες λειτουργίας.

- Οι διαδικασίες της ανάλυσης θεωρούν ότι τα σφάλματα ακολουθούν κανονική κατανομή πυκνότητας πιθανότητας, αν και οι διαδικασίες δεν είναι καθόλου ευαίσθητες σε αποκλίσεις από την κανονική κατανομή.

- **Μετάδοση στοιχειωδών σφαλμάτων**

- Η διαδικασία της ανάλυσης αβεβαιότητας πολλαπλών μετρήσεων περιλαμβάνει τα παρακάτω βήματα:

  1. Ταυτοποίηση των στοιχειωδών σφαλμάτων που εμφανίζονται στις τρεις ομάδες πηγών (βαθμονόμησης, συλλογής δεδομένων και ανάλυσης δεδομένων).

  2. Εκτίμηση του μεγέθους του συστηματικού σφάλματος και του τυχαίου σφάλματος κάθε στοιχειώδους πηγής σφάλματος.

  3. Εκτίμηση της μετάδοσης αβεβαιότητας στο αποτέλεσμα.

- Για την ταυτοποίηση των στοιχειωδών σφαλμάτων σημαντική καθοδήγηση μπορεί να παρασχεθεί από τους πίνακες 5.1-5.3 και από την αβεβαιότητα στο στάδιο της σχεδίασης.

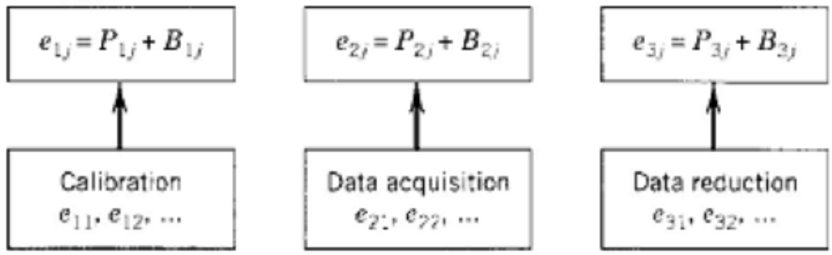
- Στην ανάλυση αβεβαιότητας πολλαπλών μετρήσεων είναι δυνατός ο διαχωρισμός των στοιχειωδών σφαλμάτων σε τυχαία και συστηματικά μέρη.

- Η στατιστική χρησιμοποιείται για την εκτίμηση του τυχαίου μέρους κάθε σφάλματος.

- Θεωρούμε τη μέτρηση της μεταβλητής x, που υπόκειται σε στοιχειώδη τυχαία σφάλματα, P_{ij}, και συστηματικά, B_{ij} σε καθεμιά από τις τρείς πηγές σφαλμάτων.

- Ο δείκτης i, όπου i=1,2,3 αναφέρεται στις τρείς πηγές σφαλμάτων (σφάλμα βαθμονόμησης, i=1, σφάλμα συλλογής δεδομένων, i=2, σφάλμα ανάλυσης δεδομένων, i=3) και ο δείκτης j όπου j=1,2,…,K αναφέρεται σε κάθε ένα μέχρι και τα K στοιχειώδη σφάλματα, e_{ij}, κάθε πηγής.

- Τότε $e_{ij}= P_{ij}+ B_{ij}$ όπως φαίνεται στο σχήμα 5.6.



Σχήμα 5.6 Η μέθοδος αβεβαιότητας πολλαπλών μετρήσεων διαχωρίζει τα στοιχειώδη σφάλματα σε τυχαία και συστηματικά.

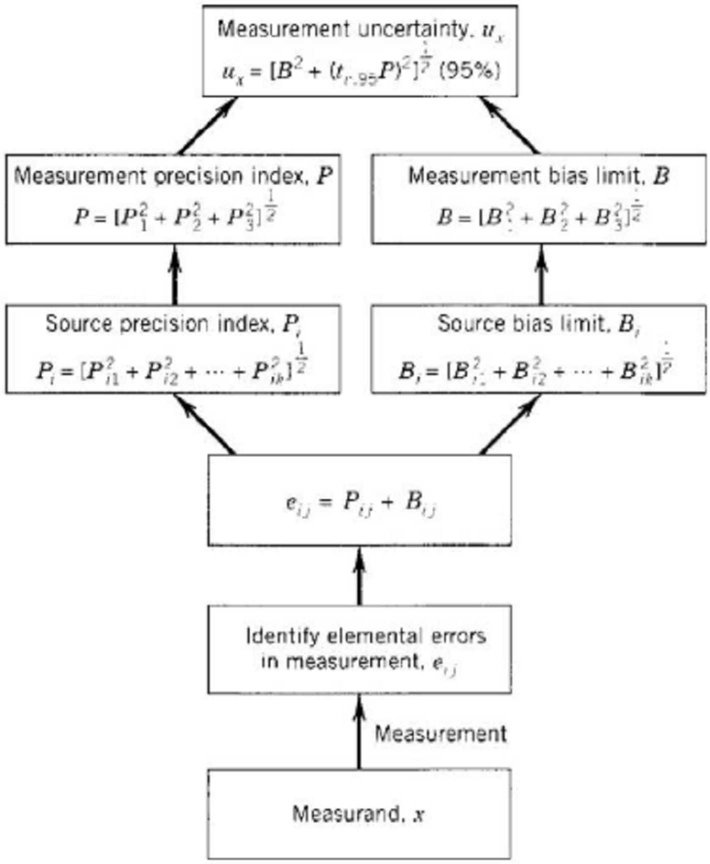
- Μια μέθοδος εκτίμησης της αβεβαιότητας του x που βασίζεται στα στοιχειώδη τυχαία και συστηματικά σφάλματα δίνεται στο Σχήμα 5.7.

- Η μετάδοση των τυχαίων σφαλμάτων που οφείλονται σε μία πηγή δίδεται από τον <u>δείκτη τυχαίου σφάλματος</u> της πηγής, P_i και υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο RSS.

$$P_i = \sqrt{P_{i1}^2 + P_{i2}^2 + \ldots + P_{iK}^2} \quad i = 1,2,3$$

- Ο <u>δείκτης τυχαίου σφάλματος της μέτρησης</u>, P, αντιπροσωπεύει όλα τα στοιχειώδη τυχαία σφάλματα που επηρεάζουν τη συνολική μέτρηση της μεταβλητής x και υπολογίζεται με τη μέθοδο RSS από του δείκτες τυχαίου σφάλματος των πηγών:

$$P = \sqrt{P_1 + P_2 + P_3}$$



Σχήμα 5.6 Η διαδικασία συνδυασμού των αβεβαιοτήτων στην περίπτωση πολλαπλών μετρήσεων.

- Η μετάδοση των στοιχειωδών συστηματικών σφαλμάτων, B_{ij}, αντιμετωπίζεται με παρόμοιο τρόπο, ο <u>δείκτης συστηματικού σφάλματος</u>, B_i, για συγκεκριμένη ομάδα πηγών είναι:

$$B_i = \sqrt{B_{i1}^2 + B_{i2}^2 + ... + B_{iK}^2} \qquad i = 1,2,3$$

- Ο <u>συνολικός συστηματικός δείκτης</u>, αντιπροσωπεύει όλα τα στοιχειώδη συστηματικά σφάλματα που επηρεάζουν τη μέτρηση της μεταβλητής x:

$$B = \sqrt{B_1 + B_2 + B_3}$$

- Η μέτρηση της αβεβαιότητας του x, u_x, μπορεί να εκφραστεί ως συνδυασμός του συστηματικού και του τυχαίου σφάλματος με τον ακόλουθο τρόπο :

$$u_x = \sqrt{(B)^2 + (t_{\nu,95}P)} \quad (95\%)$$

- Η εκτίμηση των βαθμών ελευθερίας, ν, του τυχαίου δείκτη, P, προκύπτει χρησιμοποιώντας τον τύπο των Welch-Satterthwaite:

$$\nu = \frac{\left(\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{K} P_{ij}^{2} \right)^{2}}{\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{K} \left[P_{ij}^{4} / \left(N_{ij} - 1 \right) \right]}$$

<u>Μετάδοση της αβεβαιότητας στο αποτέλεσμα</u>

- Θεωρούμε το αποτέλεσμα R το οποίο εξαρτάται μέσω της συναρτησιακής σχέσης από τις μετρούμενες ανεξάρτητες μεταβλητές x_i, x_1, x_2,…, x

- Ο ακέραιος, L εκφράζει τον αριθμό των ανεξάρτητων μεταβλητών. Σε κάθε μεταβλητή x_i αντιστοιχεί συστηματικό, B, και τυχαίο, P, σφάλμα μέτρησης.

- Η εκτίμηση της πραγματικής τιμής R΄, είναι:

$$R' = \bar{R} \pm u_R \left(P\% \right),$$

όπου

$$\bar{R} = f_1 \left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_L \right)$$

- Η αβεβαιότητα του αποτελέσματος u_R δίδεται από τη σχέση:

$$u_R = f_2 \left[(B)_{x_1}, (B)_{x_2}, ..., (B)_{x_L} ; (P)_{x_1}, (P)_{x_2}, ..., (P)_{x_L} \right]$$

- Η μετάδοση του τυχαίου σφάλματος των μεταβλητών στο αποτέλεσμα ονομάζεται <u>τυχαίο σφάλμα του αποτελέσματος</u> και δίδεται από τη σχέση:

$$P_R = \pm \sqrt{ \sum_{i=1}^{L} \left[\theta_i \left(P \right)_{x_i} \right] }$$

όπου θ_i είναι δείκτης ευαισθησίας

- Η μετάδοση του συστηματικού σφάλματος των μεταβλητών στο αποτέλεσμα ονομάζεται <u>συστηματικό σφάλμα του αποτελέσματος</u> και δίδεται από τη σχέση:

$$B_R = \pm \sqrt{ \sum_{i=1}^{L} \left[\theta_i \left(B \right)_{x_i} \right] }$$

όπου θ_i είναι δείκτης ευαισθησίας

- Η μέτρηση της αβεβαιότητας του R, u_R, μπορεί να εκφραστεί ως συνδυασμός του συστηματικού και του τυχαίου σφάλματος του αποτελέσματος με τον ακόλουθο τρόπο:

$$u_x = \sqrt{(B_R)^2 + (t_{\nu,95} P_R)^2} \quad (95\%)$$

- Εάν οι βαθμοί ελευθερίας των μεταβλητών, x_i, δεν είναι ίσοι, οι βαθμοί ελευθερίας του αποτελέσματος προκύπτει χρησιμοποιώντας τον τύπο των Welch-Satterthwaite:

$$\nu_R = \frac{\left(\sum_{i=1}^{L} \left[\theta_i (P)_{x_i}\right]^2 \right)^2}{\sum_{i=1}^{L} \left\{ \left[\theta_i (P)_{x_i}\right]^4 / (\nu)_{x_i} \right\}}$$

Παράδειγμα 7

Ένα μετρητικό σύστημα πίεσης έχει τάση εξόδου ανάλογη της πίεσης. Βαθμονομείται σε σύγκριση με πρότυπο αισθητήρα (πιστοποιημένης ακρίβειας: εντός ±0.5 psi) για την περιοχή τιμών 0-100 psi και προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα. Η τάση μετριέται με ένα βολτόμετρο (σφάλμα οργάνου: εντός ±10μV και διακριτική ικανότητα 1μV). Ο μηχανικός που πρόκειται να χρησιμοποιήσει αυτό το σύστημα εκτιμά πως οι επιδράσεις της εγκατάστασης του αισθητήρα μπορεί να προκαλέσουν απόκλιση της ενδεικνυόμενης πίεσης κατά ±5 psi. Προσδιορίστε την αβεβαιότητα με επίπεδο εμπιστοσύνης 95% για τη χρήση του συστήματος βασιζόμενοι σ τις δεδομένες πληροφορίες.

E[mV]	0.004	0.399	0.771	1.624	2.147	4.121
p[psi]	0.1	10.2	19.5	40.5	51.2	99.6

Δίδονται:

Πρότυπο: B_{14} = ±0.5psi P_{14} = 0
Βολτόμετρο: B_{24} = ±10μV P_{24} = 0
P_{31} = Syx = 0.746 με ν = 4

Ζητείται: το u_p

Λύση

Προσαρμογή των δεδομένων βαθμονόμησης με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

p[psi] = 0.54 + 24.03E [mV] ± (2.776)(0.746)

Έτσι P_{31} = Syx = 0.746 για ν = 4 και K = dp/dE = 24.03 psi/mV

$B = (0.5^2 + (0.001 \text{ mV X } 24.03 \text{ psi/mv})^2 + 0.5^2)^{0.5} = \pm 0.707$ psi

και

$u_p = \pm (0.707^2 + [2.776 \text{ x } 0.746]^2)^{0.5} = \pm 2.19$ psi (95%)