Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πειραιά
Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών
Τμήμα Μηχανολογίας

Μετρήσεις Τεχνικών Μεγεθών

Χειμερινό Εξάμηνο 2007
Παραδοτέα 30/11/2007
Πρόοδος Ι (3 & 4/12/2007)

ΕΡΓΑΣΙΑ ΙΙ

Πρόβλημα 1

Αιτιολογείστε ποια από τα παρακάτω σήματα είναι περιοδικά ή μη περιοδικά. Για τα περιοδικά σήματα υπολογίστε τη θεμελιώδη περίοδο και βρείτε τις αρμονικές που περιέχονται. Επίσης, υπολογίστε τη μέση τιμή, την ισχύ και την ενεργό τιμή:

a) $y_1(t) = 4\cos(6\pi t) + 8\cos^2(8\pi t)$

b) $y_2(t) = \left[4\cos(6\pi t) + 8\cos^2(8\pi t)\right] \cdot \cos(10\pi t)$

c) $y_3(t) = 7\pi + 5\cos\left(\dfrac{2\pi t}{5}\right) + \pi\sin\left(\dfrac{2\pi t}{8}\right) + 18\cos\left(\dfrac{2\pi t}{11} + \dfrac{\pi}{3}\right)$

d) $y_4(t) = e^{j\left(\frac{t}{3} + \frac{3\pi}{8}\right)}$

e) $y_5(t) = e^{\frac{j\pi t}{16}}\cos\left(\dfrac{\pi t}{17}\right)$

f) $y_6(t) = \sin(2\pi 100t)\cos(2\pi 40t) + \cos(2\pi 100t)\cos(2\pi 40t)$

Λύση

a)

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα:

$\cos^2(\omega t) = \dfrac{1}{2}\left[1 + \cos(2\omega t)\right]$ προκύπτει:

$$y_1(t) = 4\cos(6\pi t) + 8\cos^2(8\pi t) = 4\cos(6\pi t) + \frac{8}{2}\left[1 + \cos(16\pi t)\right]$$

$$= 4 + 4\cos(6\pi t) + 4\cos(16\pi t)$$

$f_1 = 3$ Hz και $f_2 = 8$ Hz

$\dfrac{f_2}{f_1} = \dfrac{8}{3}$ ρητός αριθμός, άρα η $y_1(t)$ είναι περιοδική

Η θεμελιώδης συχνότητα είναι $f_0 =$ Μ.Κ.Δ.$(f_1, f_2) = 1$ και $\omega_0 = 2\pi$ **,** άρα η θεμελιώδης περίοδος είναι $T_0 = 1$ sec οπότε

$$y_1(t) = 4 + 4\cos(6\pi t) + 4\cos(16\pi t) = 4 + 4\cos(3\omega_0 t) + 4\cos(8\omega_0 t)$$

-Μέση τιμή: 4

- Ισχύς: $P_{y_1} = C_0^2 + \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 = 4^2 + \dfrac{1}{2}(4^2 + 4^2) = 32$

-Ενεργός τιμή: $y_{1-\varepsilon\nu\varepsilon\rho\gamma o\varsigma} = \sqrt{P_{y_1}} = 4\sqrt{2}$

b) Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}[1+\cos(2\omega t)]$ και $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$ προκύπτει:

$$y_2(t) = [4\cos(6\pi t)+8\cos^2(8\pi t)]\cdot\cos(10\pi t) = 4\cos(6\pi t)\cdot\cos(10\pi t)+8\frac{1}{2}[1+\cos(16\pi t)]\cdot\cos(10\pi t)$$

$$= 2\cos(16\pi t)+2\cos(4\pi t)+4\cos(10\pi t)+4\cos(16\pi t)\cdot\cos(10\pi t)$$

$$= 2\cos(16\pi t)+2\cos(4\pi t)+4\cos(10\pi t)+2\cdot\cos(26\pi t)+2\cdot\cos(6\pi t)$$

$$= 2\cos(4\pi t)+2\cdot\cos(6\pi t)+4\cos(10\pi t)+2\cos(16\pi t)+2\cdot\cos(26\pi t)$$

$f_1 = 2$ Hz, $f_2 = 3$ Hz, $f_3 = 5$ Hz, $f_4 = 8$ Hz και $f_5 = 13$ Hz

$\frac{f_2}{f_1} = \frac{3}{2}$, $\frac{f_3}{f_1} = \frac{5}{2}$, $\frac{f_4}{f_1} = \frac{8}{2} = \frac{4}{1}$, $\frac{f_5}{f_1} = \frac{13}{2}$ ρητοί αριθμοί, άρα η $y_2(t)$ είναι περιοδική

Η θεμελιώδης συχνότητα είναι $f_0 =$ Μ.Κ.Δ.$(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) = 1$ και $\omega_0 = 2\pi$, άρα η θεμελιώδης περίοδος είναι $T_0 = 1$ sec οπότε

$$y_2(t) = 2\cos(2\omega_0 t)+2\cdot\cos(3\omega_0 t)+4\cos(5\omega_0 t)+2\cos(8\omega_0 t)+2\cdot\cos(13\omega_0 t)$$

-Μέση τιμή: 0

- Ισχύς: $P_{y_2} = C_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 = 0^2 + \frac{1}{2}(2^2+2^2+4^2+2^2+2^2) = 16$

-Ενεργός τιμή: $y_{2-\varepsilon\nu\varepsilon\rho\gamma o\varsigma} = \sqrt{P_{y_2}} = 4$

c)

$$y_3(t) = 7\pi + 5\cos\left(\frac{2\pi t}{5}\right) + \pi\sin\left(\frac{2\pi t}{8}\right) + 18\cos\left(\frac{2\pi t}{11}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$f_1 = \frac{1}{5}$ Hz, $f_2 = \frac{1}{8}$ Hz και $f_3 = \frac{1}{11}$ Hz

$\frac{f_2}{f_1} = \frac{5}{8}$, $\frac{f_3}{f_1} = \frac{5}{11}$ ρητοί αριθμοί, άρα η $y_3(t)$ είναι περιοδική

Η θεμελιώδης συχνότητα είναι $f_0 =$ Μ.Κ.Δ.$(f_1, f_2, f_3) = \frac{1}{440}$ και $\omega_0 = \frac{2\pi}{440}$, άρα η θεμελιώδης περίοδος είναι $T_0 = 440$ sec οπότε

$$y_3(t) = 7\pi + 5\cos\left(\frac{2\pi t}{5}\right) + \pi\sin\left(\frac{2\pi t}{8}\right) + 18\cos\left(\frac{2\pi t}{11}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 7\pi + 5\cos(88\omega_0 t) + \pi\sin(55\omega_0 t) + 18\cos\left(40\omega_0 t + \frac{\pi}{3}\right)$$

-Μέση τιμή: 7π

- Ισχύς: $P_{y_2} = A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n^2 + B_n^2\right] = (7\pi)^2 + \frac{1}{2}(5^2+\pi^2+18^2) = 666.045$

-Ενεργός τιμή: $y_{3-\varepsilon\nu\varepsilon\rho\gamma o\varsigma} = \sqrt{P_{y_3}} = 25.75$

d) $y_4(t) = e^{j\left(\frac{t}{3}+\frac{3\pi}{8}\right)}$

Για να είναι μία συνάρτηση περιοδική πρέπει

$$y_4(t) = y_4(t+T) \Rightarrow e^{j\left(\frac{t}{3}+\frac{3\pi}{8}\right)} = e^{j\left(\frac{t+T}{3}+\frac{3\pi}{8}\right)} = e^{j\left(\frac{t}{3}+\frac{3\pi}{8}\right)}e^{j\left(\frac{T}{3}\right)} \Rightarrow e^{j\left(\frac{T}{3}\right)} = 1$$

$$e^{j\left(\frac{T}{3}\right)}=1 \Rightarrow \frac{T}{3}=2k\pi \Rightarrow T=6k\pi \Rightarrow T_0=6\pi$$

-Μέση τιμή: 0

- Ισχύς: $P_{y_4}=\frac{1}{T}\int_a^{a+T}|y(t)|^2dt=\frac{1}{T}\int_0^T|y(t)|^2dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|D_n|^2=1$ επειδή $\left|e^{j\left(\frac{t+T}{3}+\frac{3\pi}{8}\right)}\right|=1$

-Ενεργός τιμή: $y_{4-\varepsilon\nu\varepsilon\rho\gamma o\varsigma}=\sqrt{P_{y_4}}=1$

e) $y_5(t)=e^{\frac{j\pi t}{16}}\cos\left(\frac{\pi t}{17}\right)=e^{\frac{j\pi t}{16}}\frac{e^{\frac{j\pi t}{17}}+e^{-\frac{j\pi t}{17}}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{j33\pi t}{272}}+e^{\frac{j\pi t}{272}}\right)$

Το σήμα προκύπτει από το γινόμενο δύο ημιτονοειδών σημάτων
Το πρώτο σήμα έχει περίοδο $T_1=32$
Το δεύτερο σήμα έχει περίοδο $T_2=34$
Η θεμελιώδης περίοδος του σήματος είναι $T_0=$ Ε.Κ.Π.$(T_1,T_2)=544$ sec

-Μέση τιμή: 0

- Ισχύς: $P_{y_5}=\frac{1}{T}\int_a^{a+T}|y(t)|^2dt=\frac{1}{T}\int_0^T|y(t)|^2dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|D_n|^2=1$ επειδή $\left|e^{j\theta}\right|=1$

-Ενεργός τιμή: $y_{5-\varepsilon\nu\varepsilon\rho\gamma o\varsigma}=\sqrt{P_{y_5}}=1$

f) $y_6(t)=\sin(2\pi 100t)\cos(2\pi 40t)+\cos(2\pi 100t)\cos(2\pi 40t)$

Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$ και $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$

προκύπτει:

$$\begin{aligned} y_6(t)&=\sin(2\pi 100t)\cos(2\pi 40t)+\cos(2\pi 100t)\cos(2\pi 40t)\\ &=\frac{1}{2}[\sin(2\pi 60t)+\sin(2\pi 140t)]+\frac{1}{2}[\cos(2\pi 140t)+\cos(2\pi 40t)]\\ &=\frac{1}{2}[\cos(2\pi 60t)+\sin(2\pi 60t)]+\frac{1}{2}[\cos(2\pi 140t)+\sin(2\pi 140t)]\\ &=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(2\pi 60t-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2\pi 140t-\frac{\pi}{4}\right)\right]\end{aligned}$$

$f_2=60$ Hz και $f_2=140$ Hz

$\frac{f_2}{f_1}=\frac{140}{60}=\frac{7}{3}$ ρητός αριθμός, άρα η $y_6(t)$ είναι περιοδική

Η θεμελιώδης συχνότητα είναι $f_0=$ Μ.Κ.Δ.$(f_1,f_2)=20$ και $\omega_0=2\pi 20$, άρα η θεμελιώδης περίοδος είναι $T_0=\frac{1}{20}$ sec οπότε $y_6(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(3\omega_0 t-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(7\omega_0 t-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

-Μέση τιμή: 0

- Ισχύς: $P_{y_1}=C_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}C_n^2=0^2+\frac{1}{2}\frac{2}{4}(1^2+1^2)=\frac{1}{2}$

-Ενεργός τιμή: $y_{1-\varepsilon\nu\varepsilon\rho\gamma o\varsigma} = \sqrt{P_{y_6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Πρόβλημα 2

Η τριγωνομετρική σειρά Fourier ενός περιοδικού σήματος δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$f(t) = 3 + \sqrt{3}\cos 2t + \sin 2t + \sin 3t - \frac{1}{2}\cos(5t + \frac{\pi}{3})$$

a) Παρουσιάστε γραφικά το μονόπλευρο φάσμα της σειράς Fourier

b) Μετά από παρατήρηση του μονόπλευρου φάσματος, σχεδιάστε το δίπλευρο φάσμα (της εκθετικής έκφρασης της σειράς Fourier).

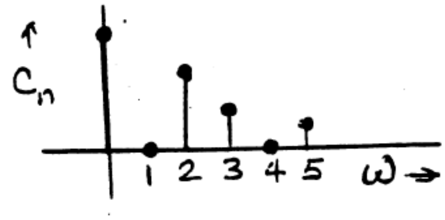
c) Από την παρατήρηση του γραφήματος του δίπλευρου φάσματος, γράψτε την εκθετική μορφή της σειράς Fourier

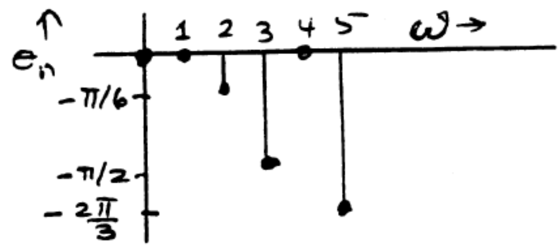
Λύση

a)

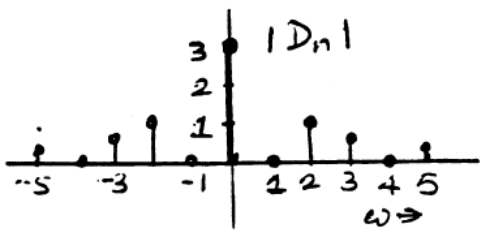
$$\begin{aligned} f(t) &= 3 + \sqrt{3}\cos 2t + \sin 2t + \sin 3t - \frac{1}{2}\cos(5t + \frac{\pi}{3}) \\ &= 3 + 2\cos(2t - \frac{\pi}{6}) + \cos(3t - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}\cos(5t + \frac{\pi}{3} - \pi) \\ &= 3 + 2\cos(2t - \frac{\pi}{6}) + \cos(3t - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}\cos(5t - \frac{2\pi}{3}) \end{aligned}$$

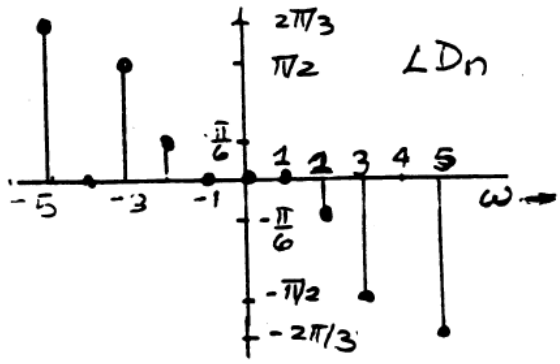
Το μονόπλευρο φάσμα της σειράς Fourier είναι:





b) Το δίπλευρο φάσμα της σειράς Fourier (της εκθετικής μορφής) είναι:





γ) Η εκθετική μορφή της σειράς Fourier είναι:

$$\begin{aligned} f(t) &= 3 + 2\cos(2t - \frac{\pi}{6}) + \cos(3t - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}\cos(5t - \frac{2\pi}{3}) \\ &= 3 + e^{j(2t-\frac{\pi}{6})} + e^{-j(2t-\frac{\pi}{6})} + \frac{1}{2}e^{j(3t-\frac{\pi}{2})} + \frac{1}{2}e^{-j(3t-\frac{\pi}{2})} + \frac{1}{4}e^{j(5t-\frac{2\pi}{3})} + \frac{1}{4}e^{-j(5t-\frac{2\pi}{3})} \end{aligned}$$

Πρόβλημα 3

Η εκθετική μορφή ενός περιοδικού σήματος δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$f(t) = (2+2j)e^{-j3t} + j2e^{-jt} + 3 - j2e^{jt} + (2-2j)e^{j3t}$$

a) Παρουσιάστε γραφικά το δίπλευρο φάσμα της σειράς Fourier

b) Μετά από παρατήρηση του δίπλευρου φάσματος, σχεδιάστε το μονόπλευρο φάσμα της σειράς Fourier.

c) Από την παρατήρηση του γραφήματος του μονόπλευρου φάσματος, γράψτε τη σειρά Fourier σε συν-ημιτονοειδή μορφή και υπολογίστε τους συντελεστές A_n και B_n.

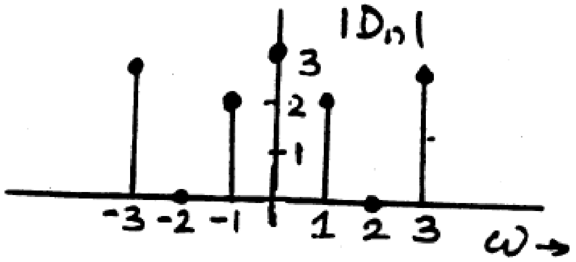
Λύση

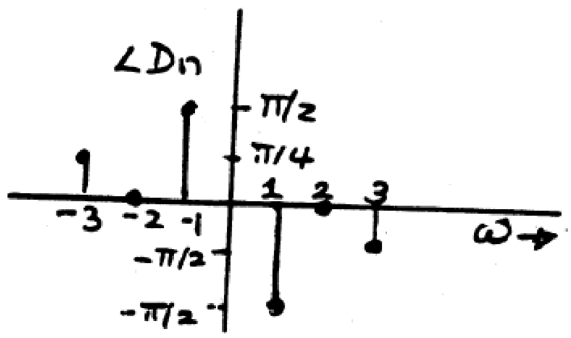
α)

$$f(t) = (2+2j)e^{-j3t} + j2e^{-jt} + 3 - j2e^{jt} + (2-2j)e^{j3t}$$

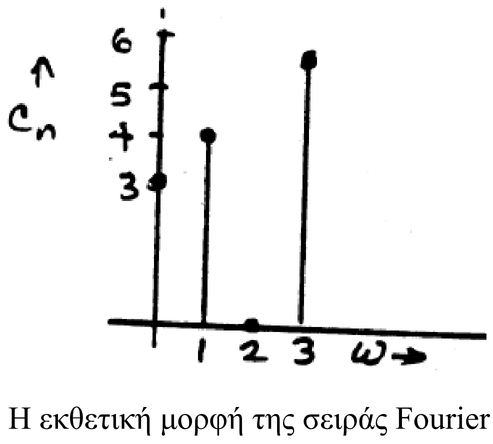
$$= (2\sqrt{2}\cdot e^{\frac{j\pi}{4}})e^{-j3t} + 2e^{\frac{j\pi}{2}}e^{-jt} + 3 + 2\cdot e^{-\frac{j\pi}{2}}e^{jt} + (2\sqrt{2}\cdot e^{-\frac{j\pi}{4}})e^{j3t}$$

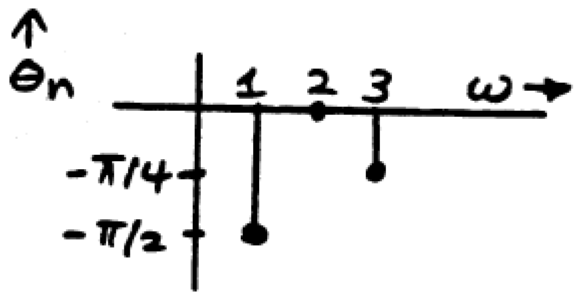
Το δίπλευρο φάσμα της σειράς Fourier (της εκθετικής μορφής) είναι:





β) Το μονόπλευρο φάσμα της σειράς Fourier είναι:





Η εκθετική μορφή της σειράς Fourier είναι:

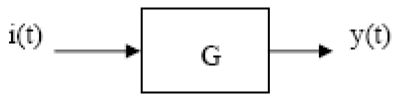
$$f(t) = 3 + 2e^{\frac{j\pi}{2}}e^{-jt} + 2\cdot e^{-\frac{j\pi}{2}}e^{jt} + (2\sqrt{2}\cdot e^{\frac{j\pi}{4}})e^{-j3t} + (2\sqrt{2}\cdot e^{-\frac{j\pi}{4}})e^{j3t}$$

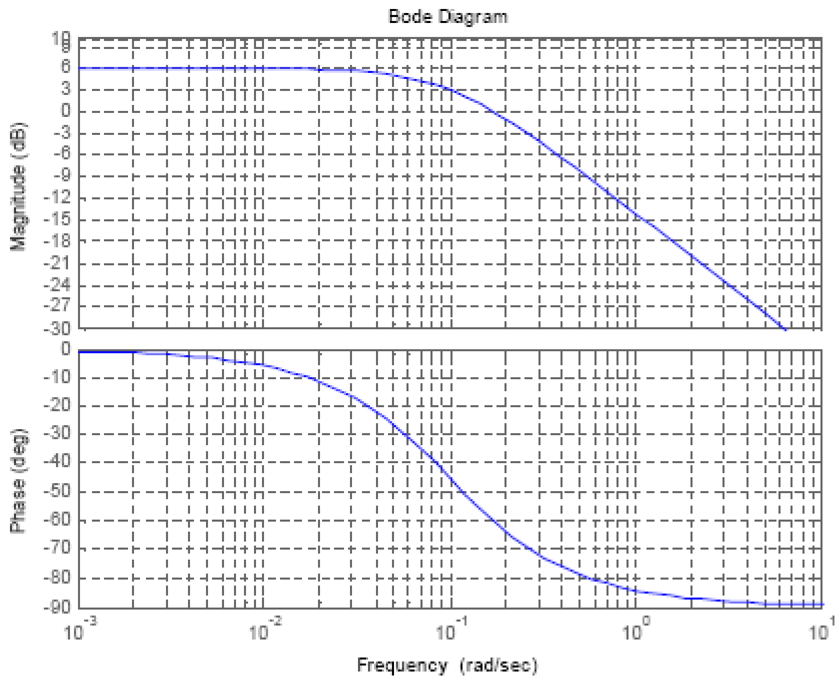
$$= 3 + 2\cdot e^{-j(t-\frac{\pi}{2})} + 2\cdot e^{+j(t-\frac{\pi}{2})} + (2\sqrt{2})e^{-j(3t-\frac{\pi}{4})} + (2\sqrt{2})e^{+j(3t-\frac{\pi}{4})}$$

$$= 3 + 4\cdot\cos(t-\frac{\pi}{2}) + 4\sqrt{2}\cos(3t-\frac{\pi}{4})$$

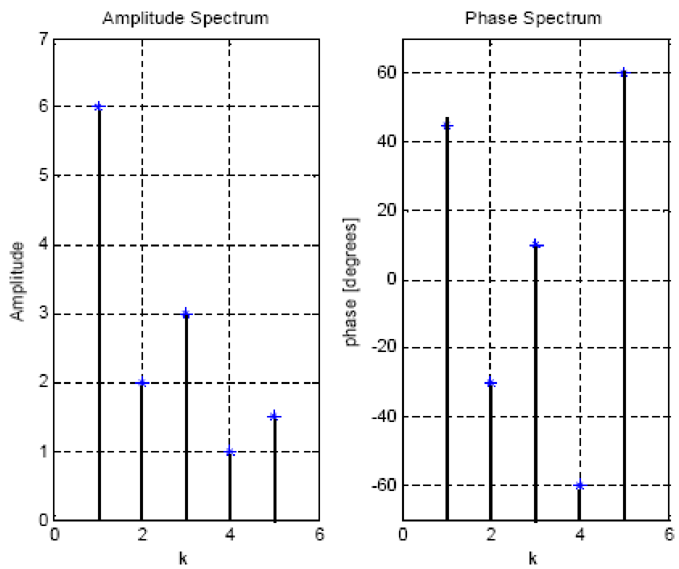
Πρόβλημα 4

Θεωρούμε ένα μετρητικό σύστημα, G που περιγράφεται με το παρακάτω διάγραμμα Bode, και με είσοδο $i(t)$ και έξοδο $y(t)$.





Θεωρούμε ότι η είσοδος του συστήματος $i(t)$ είναι σειρά αθροίσματος ημιτόνων με θεμελιώδη συχνότητα 0.09 rad/sec και με το ακόλουθο φάσμα πλάτους και φάσης (ημιτόνου).



a) Γράψτε τη συνάρτηση εισόδου $i(t)$

b) Υπολογίστε τη συνάρτηση εξόδου του συστήματος $y(t)$, χρησιμοποιώντας την είσοδο $i(t)$ από το προηγούμενο ερώτημα και το διάγραμμα Bode.

c) Παραστήστε γραφικά το φάσμα πλάτους και φάσης του $y(t)$.

Λύση

a) Συνάρτηση εισόδου $i(t)$

$$i(t) = 0 + 6\sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}) + 2\sin(2\omega_0 t - \frac{\pi}{6}) + 3\sin(3\omega_0 t + \frac{\pi}{18}) + \sin(4\omega_0 t - \frac{\pi}{3}) +$$

$$+1.5\sin(5\omega_0 t - \frac{\pi}{3})$$

με $\omega_0 = 0.09$ rad/sec έχουμε

K	$\omega_0\ [\frac{rad}{\sec}]$	$\lvert G(j\omega)\rvert_{db}$ (διάγραμμα)	$\lvert G(j\omega)\rvert$	Διαφορά φάσης [rad] (deg)
1	0.09	3.5	1.5	-0.75 (-43)
2	0.18	0	1	-1.01 (-58)
3	0.27	-3	0.7	-1.2 (-70)
4	0.36	-5.5	0.53	-1.3 (-74)
5	0.45	7.5	0.42	-1.36 (-78)

b)

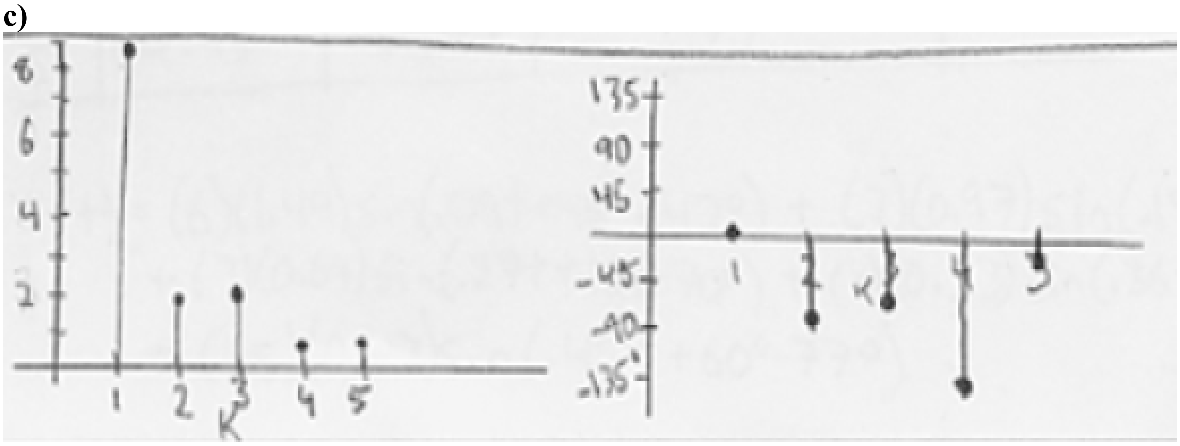
$$y(t) = (6)(1.5)\sin(\omega t + \frac{\pi}{4} - 0.75) + 2\sin(2\omega t - \frac{\pi}{6} - 1.01) + (3)(0.7)\sin(3\omega t + \frac{\pi}{18} - 1.2)$$

$$+ 0.53\sin(4\omega t - \frac{\pi}{3} - 1.3) + (1.5)(0.42)\sin(5\omega t - \frac{\pi}{3} - 1.6)$$

$$= 9\sin(\omega t + 0.035) + 2\sin(2\omega t - 1.53) + 2.1\sin(3\omega t - 1.025) + 0.53\sin(4\omega t - 2.34)$$

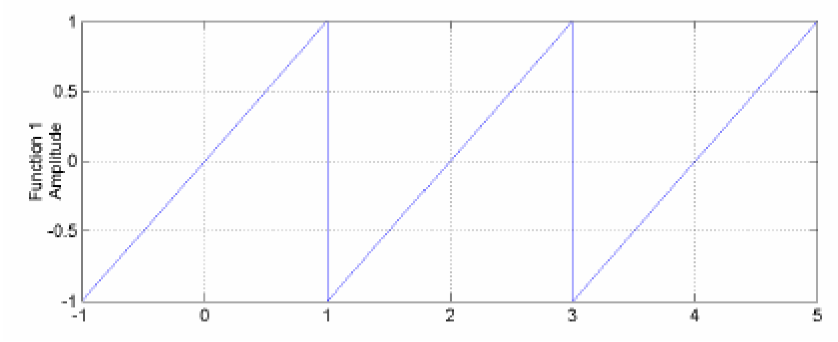
$$+ 0.63\sin(5\omega t - 2.64)$$

c)

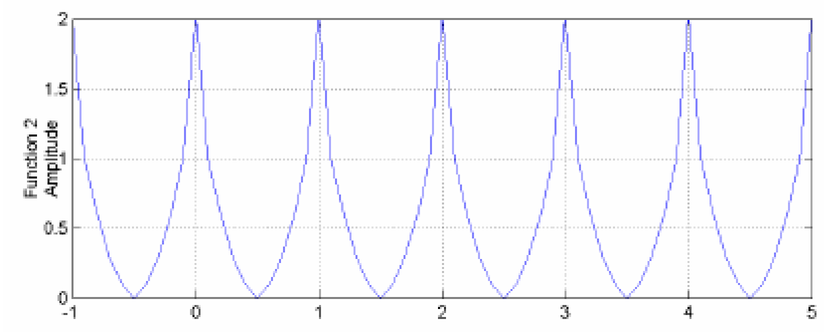


Πρόβλημα 5

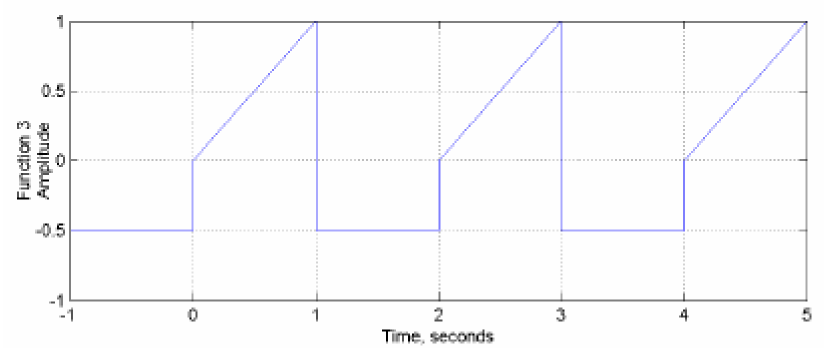
Προσδιορίστε για καθεμιά από τις παρακάτω περιοδικές κυματομορφές αν είναι άρτια ή περιττή ή ούτε άρτια ούτε περιττή, τη μέση και ενεργό τιμή της καθώς και την περίοδό της.


Function 1
Amplitude
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
0
1
2
3
4
5

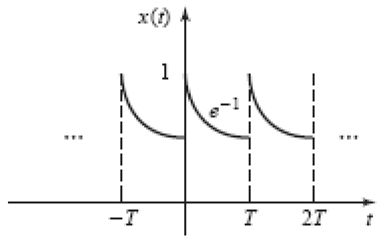
(α)


Function 2
Amplitude
2
1.5
1
0.5
0
-1
0
1
2
3
4
5

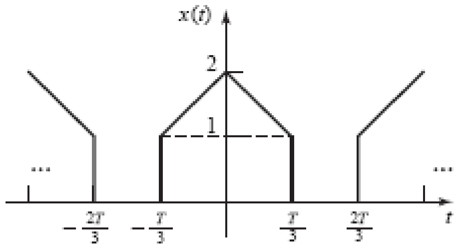
(β)


Function 3
Amplitude
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
0
1
2
3
4
5
Time, seconds

(γ)


x(t)
1
e^{-1}
...
...
-T
T
2T
t

(δ)


x(t)
2
1
...
...
-2T/3
-T/3
T/3
2T/3
t

(ε)

Λύση

α)

$T_0 = 2\sec\,,\ \omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi\ rad/\sec$

Εφόσον η συνάρτηση είναι περιττή, οι σειρές Fourier θα περιέχουν μόνο ημιτονοειδής όρους.

$\mathrm{A}_0 = 0$

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\frac{2n\pi t}{T})$$

$$B_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} t\sin(n\omega_0 t)dt = 2\int_0^1 t\sin(n\pi t)dt = ...$$

β)

$T_0 = 2\sec\,,\ \omega_0 = \pi \quad rad/\sec$

Εφόσον η συνάρτηση είναι άρτια, οι σειρές Fourier θα περιέχουν μόνο συνημιτονοειδής όρους.

$$\mathrm{A}_0 = 2\left[\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}/2} y(t)dt\right] = 2\left[\frac{1}{2}\int_0^1 2(t-1)^2 dt\right] = ...$$

$$A_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} y(t)\cos(n\omega_0 t)dt = \frac{4}{2}\int_0^1 2(t-1)^2\cos(n\pi t)dt = ...$$

c)

$T_0 = 1\sec\,,\ \omega_0 = 2\pi \quad rad/\sec$

$\mathrm{A}_0 = 0.25$

Ούτε άρτια, ούτε περιττή

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cos(n\omega_0 t)dt = ...$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cos(n\omega_0 t)dt = ...$$

d)

$T_0 = T\sec\,,\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T}\ rad/\sec$

Ούτε άρτια, ούτε περιττή

$$\mathrm{A}_0 = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} y(t)dt = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} e^{-t}dt = \frac{1-e^{-T}}{T}$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cos(n\omega_0 t)dt = ...$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cos(n\omega_0 t)dt = ...$$

e)

$T_0 = T\sec\,,\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T}\ rad/\sec$

Άρτια

$A_0 = 1$

$$A_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} y(t)\cos(n\omega_0 t)dt = ...$$

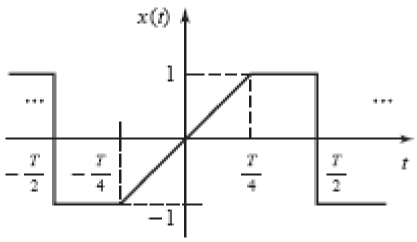
Πρόβλημα 6

Δίδεται η παρακάτω κυματομορφή.

a) Υπολογίστε το φάσμα (πλάτους και φάσης) συχνότητας για n έως 5 και παρουσιάστε το γραφικά.

b) Παρουσιάστε γραφικά το μερικό άθροισμα του αναπτύγματος της σειράς Fourier στο ίδιο γράφημα με τη δοθείσα συνάρτηση.

c) Βρείτε τη μέση και ενεργό τιμή του σήματος



Λύση

$$x(t) = \begin{cases} -1 & -\frac{T}{2} < t < -\frac{T}{4} \\ -\frac{4}{T}t & -\frac{T}{4} < t \le 0 \\ \frac{4}{T}t & 0 < t \le \frac{T}{4} \\ 1 & \frac{T}{4} \le t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Εφόσον η συνάρτηση είναι περιττή, οι σειρές Fourier θα περιέχουν μόνο ημιτονοειδής όρους.

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega_0 t)$$

$A_0 = 0$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin(n\omega_0 t)dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x(t)\sin(n\omega_0 t)dt = \frac{4}{T}\left[\int_0^{T/4} x(t)\sin(n\omega_0 t)dt + \int_{T/4}^{T/2} x(t)\sin(n\omega_0 t)dt\right]$$

$$= \frac{4}{T}\left[\int_0^{T/4} \frac{4}{T} t\sin(n\omega_0 t)dt + \int_{T/4}^{T/2} \sin(n\omega_0 t)dt\right]$$

$$= \frac{4}{T}\left[\frac{4}{T}\left[\frac{\sin(n\omega_0 t)}{(n\omega_0)^2} - \frac{t\cos(n\omega_0 t)}{(n\omega_0)}\right]_0^{T/4} - \left[\frac{\cos(n\omega_0 t)}{(n\omega_0)}\right]_{T/4}^{T/2}\right]$$

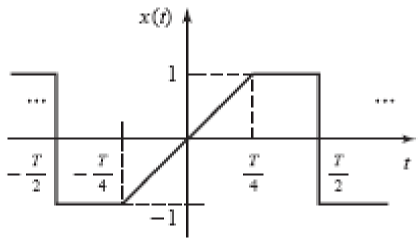
$$= \frac{4}{T}\left[\frac{4}{T}\left[\frac{\sin(n\pi/2)}{(n\omega_0)^2} - \frac{(T/4)\cos(n\pi/2)}{(n\omega_0)} - 0 + 0\right] - \left[\frac{\cos(n\pi)}{(n\omega_0)} - \frac{\cos(n\pi/2)}{(n\omega_0)}\right]\right]$$

$$= \frac{4}{T}\left[\frac{4}{T}\frac{\sin(n\pi/2)}{(n\omega_0)^2} - \frac{\cos(n\pi/2)}{(n\omega_0)} - \frac{\cos(n\pi)}{(n\omega_0)} + \frac{\cos(n\pi/2)}{(n\omega_0)}\right]$$

$$= \frac{4}{T}\left[\frac{4}{T}\frac{\sin(n\pi/2)}{(n\omega_0)^2} - \frac{\cos(n\pi)}{(n\omega_0)}\right]$$

Πρόβλημα 7

Υπολογίστε τους συντελεστές της σειράς Fourier σε εκθετική μορφή του παρακάτω σήματος, χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των συντελεστών, και σχεδιάστε τα δίπλευρα και μονόπλευρα φάσματα πλάτους και φάσης του σήματος. Βρείτε τη μέση και ενεργό τιμή του σήματος.
Από τους συντελεστές της τριγωνομετρικής σειράς του προηγουμένου προβλήματος να υπολογιστούν οι συντελεστές της εκθετικής σειράς και να συγκριθούν με τους συντελεστές της εκθετικής σειράς που βρέθηκε εδώ.



Λύση

$$x(t) = \begin{cases} -1 & -\dfrac{T}{2} < t < -\dfrac{T}{4} \\ -\dfrac{4}{T}t & -\dfrac{T}{4} < t \le 0 \\ \dfrac{4}{T}t & 0 < t \le \dfrac{T}{4} \\ 1 & \dfrac{T}{4} \le t < \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

$$D_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = ...$$