Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πειραιά

Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών
Τμήμα Μηχανολογίας

<u>Μετρήσεις Τεχνικών Μεγεθών</u>

Τελική Εξέταση Ι (Ιουνίου)

Εαρινό Εξάμηνο 2009

Πρόβλημα 1
A

a) Ένας μηχανικός, με βάση τις μετρήσεις δείγματος ($\bar{x} = 5cm$), βρήκε ότι η μέση διάμετρος των οδοντωτών τροχών είναι $5cm \pm 0.04cm$ με επίπεδο εμπιστοσύνης 90%. Ποια είναι η τυπική απόκλιση, S_x εάν ο αριθμός των μετρήσεων του δείγματος είναι: (i) 31, (ii) 64 και (iii) 81

b) Θεωρώντας ότι $S_x = 0.16$ και ότι ο αριθμός των οδοντωτών τροχών του δείγματος N είναι 70, ποιο είναι το επίπεδο εμπιστοσύνης όταν η πραγματική διάμετρος είναι $\pm 0.02cm$ από τη μέση τιμή του δείγματος.

c) Το ίδιο με το (**b**) με μόνη τη διαφορά ότι N=25.

d) Εάν $S_x = 0.16$ και N=25, ποια είναι η αβεβαιότητα της διαμέτρου ενός τυχαίου οδοντωτού τροχού, u_x, πέραν αυτών του δείγματος.

e) Ποια είναι η αβεβαιότητα της πραγματικής τυπικής απόκλισης του πληθυσμού για δείγμα με $\bar{x} = 5cm$ $S_x = 0.16$ και N=25

Λύση

a)

$$\mu = \bar{x} \pm u_{\bar{x}} = 5 \pm 0.04$$

$$u_{\bar{x}} = t_{\nu,1-\frac{a}{2}} S_{\bar{x}} = t_{\nu,0.95} S_{\bar{x}} = t_{\nu,0.95}\frac{S_x}{\sqrt{N}} \Rightarrow S_x = \frac{u_{\bar{x}}\sqrt{N}}{t_{\nu,0.95}}$$

Για

$$\text{N} = 31 \quad S_{\bar{x}} = \frac{u_{\bar{x}}\sqrt{N}}{t_{30,0.95}} = \frac{0.04\sqrt{31}}{1.697} = 0.131$$

$$\text{N} = 64 \quad S_{\bar{x}} = \frac{u_{\bar{x}}\sqrt{N}}{t_{63,0.95}} = \frac{0.04\sqrt{64}}{1.671} = 0.191$$

$$\text{N} = 64 \quad S_{\bar{x}} = \frac{u_{\bar{x}}\sqrt{N}}{z_{0.95}} = \frac{0.04\sqrt{64}}{1.671} = 0.218$$

b) Για N=70 η κατανομή είναι κανονική

$$u_{\bar{x}} = 0.02 = z_{1-\frac{a}{2}} S_{\bar{x}} = z_{1-\frac{a}{2}}\frac{S_x}{\sqrt{N}} \Rightarrow z_{1-\frac{a}{2}} = \frac{u_{\bar{x}}\sqrt{N}}{S_x} = \frac{0.02\sqrt{70}}{0.16} = 1.04$$

c)

Από τον Πίνακα κανονικής κατανομής

$$\Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0.85 \Rightarrow \alpha=0.30 \Rightarrow 1-\alpha=0.7 \Rightarrow P=70\%$$

$$t_{\nu,1-\frac{a}{2}}=\frac{u_{\bar{x}}\sqrt{N}}{S_x}=\frac{0.02\times\sqrt{45}}{0.16}=0.625$$

d)

$$u_x=t_{\nu,1-\frac{a}{2}}S_x=t_{24,0.95}S_x=1.711\times 0.16=0.2737$$

e)

$$\frac{(N-1)S_X^2}{\chi^2_{N-1,1-\frac{\alpha}{2}}}\langle\sigma^2\langle\frac{(N-1)S_X^2}{\chi^2_{N-1,\frac{\alpha}{2}}} \quad \text{όπου} \quad \begin{array}{l}\chi^2_{N-1,1-\frac{\alpha}{2}}=\chi^2_{24,0.95}=36.42\\ \chi^2_{N-1,\frac{\alpha}{2}}=\chi^2_{24,0.05}=13.85\end{array}$$

Έτσι

$$\frac{24\times(0.16^2)}{36.42}\langle\sigma^2\langle\frac{24\times(0.16^2)}{13.85}\Rightarrow 0.1687\langle\sigma^2\langle 0.4436\Rightarrow 0.13\langle\sigma\langle 0.2106$$

B

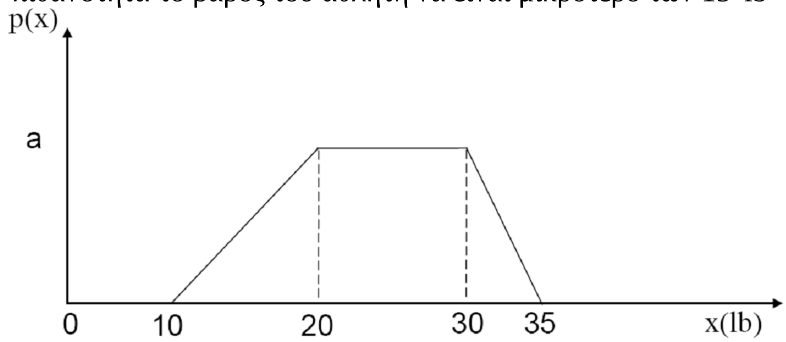
Το παρακάτω γράφημα δίνει την κατανομή πυκνότητας πιθανότητας του βάρους ενός αθλητή βάρους.

Υπολογίστε:

a) την τιμή του a και το μέσο βάρος του αθλητή

b) την αθροιστική κατανομή πυκνότητας πιθανότητας γα μια τυχαία τιμή x στο διάστημα μεταξύ 10 και 20 lb.

c) την πιθανότητα το βάρος του αθλητή να είναι μικρότερο των 15 lb



Λύση

(a)

Για να μπορεί μια συνάρτηση να είναι κατανομή πυκνότητας πιθανότητας, πρέπει να είναι $p(x)\geq 0$ και να ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=1,$$

ήτοι, το εμβαδόν κάτω από την κατανομή πυκνότητας πιθανότητας να είναι ίσο με τη μονάδα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1 \Rightarrow \frac{10a}{2} + 10a + \frac{5a}{2} = 5a + 10a + 2.5a = 17.5a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{17.5}\ \frac{1}{lb} = 0.057\ \frac{1}{lb}$$

Η εξίσωση της κατανομής πυκνότ ητας πιθανότητας στα τρία υποδιαστήματα είναι:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{p(x)-0}{x-10} = \dfrac{0.057}{10} & 10 \le x \le 20 \\ y = 0.057 & 20 < x \le 30 \\ \dfrac{p(x)-0.57}{x-30} = -\dfrac{0.057}{5} & 30 < x \le 35 \end{cases} = \begin{cases} 0.0057x - 0.057 & 10 \le x \le 20 \\ 0.057 & 20 < x \le 30 \\ -0.0114x - 0.399 & 30 < x \le 35 \end{cases}$$

Η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής είναι:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$$

$$= \int_{10}^{35} xp(x)dx = \int_{10}^{20} x \cdot [0.0057x - 0.057]dx + \int_{20}^{30} x \cdot [0.057]dx + \int_{30}^{35} x \cdot [-0.0114x + 0.342]dx$$

$$\int_{10}^{20} [0.0057x^2 - 0.057x]dx + \int_{20}^{30} [0.057x]dx + \int_{30}^{35} [-0.0114x^2 + 0.342x]dx$$

$$\bar{x} = \frac{0.0057}{3}x^3 - \frac{0.057}{2}x^2 \Big|_{10}^{20} + \frac{0.057}{2}x^2 \Big|_{20}^{30} - \frac{0.0114}{3}x^3 + \frac{0.342}{2}x^2 \Big|_{30}^{35}$$

$$= (15.2 - 11.4) - (1.9 - 2.85) + (25.65 - 11.4) + (-162.93 + 244.39) - (-102.6 + 179.55)$$

$$= 3.8 + 0.95 + 14.25 + 81.46 - 76.95 = 21.61\ lb$$

b)

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας για $10 < x \le 20$ είναι

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{10} 0d\xi + \int_{10}^{x} [0.0057\xi - 0.057]d\xi = \left[\frac{0.0057}{2}\xi^2 - 0.057\xi\right]_{10}^{x}$$

$$= \left[\frac{0.0057x^2}{2} - 0.057x\right] = 0.00285x^2 - 0.057x + 0.285$$

c)

$$\mathrm{P}\left(x \le 15\mathrm{P}\left(x \le 15\,lb\right)\right) = F\left(x = 15lb\right) = 0.00285 \times 15^2 - 0.057 \times (15) + 0.285 = 0.07125$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}\left(x \le 15\,lb\right) = 7.125\%$$

Πρόβλημα 2

Α

Αιτιολογείστε ποια από τα παρακάτω σήματα είναι περιοδικά ή μη περιοδικά. Για τα περιοδικά σήματα υπολογίστε τη θεμελιώδη περίοδο και βρείτε τις αρμονικές που περιέχονται. Επίσης, υπολογίστε τη μέση τιμή, την ισχύ, την ενεργό τιμή, επιλέξτε τον κατάλληλο ρυθμό δειγματοληψίας και μέγεθος δείγματος για να αποφευχθεί η διαρροή ενέργειας και παρουσιάστε γραφικά το μονόπλευρο φάσμα του:

a) $y_1(t) = 4\cos(6\pi t) + 8\cos^2(8\pi t)$

b) $y_2(t) = 2\sin 3t + 7\cos \pi t$

c) $y_3(t) = 3\cos\sqrt{2}t + 5\cos 2t$

Λύση

a) $y_1(t) = 4\cos(6\pi t) + 8\cos^2(8\pi t) = 4\cos(6\pi t) + \frac{8}{2}[1+\cos(16\pi t)]$

$= 4 + 4\cos(6\pi t) + 4\cos(16\pi t)$

$\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 16\pi$

Για να είναι η συνάρτηση $y_1(t)$ περιοδική πρέπει ο λόγος των συχνοτήτων ω_1 και ω_2 να είναι λόγος ακέραιων αριθμών (ρητός αριθμός). Στη συγκεκριμένη περίπτωση $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{8}$ ο λόγος τους είναι ρητός αριθμός και επομένως η συνάρτηση περιοδική. Η θεμελιώδης συχνότητα είναι: $\omega_0 = \text{ΜΚΔ}(\omega_1, \omega_2) = 2\pi$ και έτσι $\omega_1 = 3\omega_0$ και $\omega_2 = 8\omega_0$

$$\bar{y}_1 = C_0 = 4\,,\ P_{\varepsilon\nu} = C_0^2 + \frac{\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2}{2} = 4^2 + \frac{4^2 + 4^2}{2} = 32 \text{ και}$$

$$y_{1\varepsilon\nu} = \sqrt{P_{\varepsilon\nu}} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\omega_s \geq 2\omega_{\max} = 32\pi \Rightarrow f_s \geq 16 \text{ Hz}$$

Ελάχιστο μέγεθος δείγματος $N = \frac{\omega_s}{\omega_0} = \frac{f_s}{f_0} = \frac{32\pi}{2\pi} = 16$ δεδομένα

b) $\omega_1 = 3$ και $\omega_2 = \pi$ Ο λόγος $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{\pi}$ είναι άρρητος και επομένως η συνάρτηση $y_2(t)$ είναι μη περιοδική.

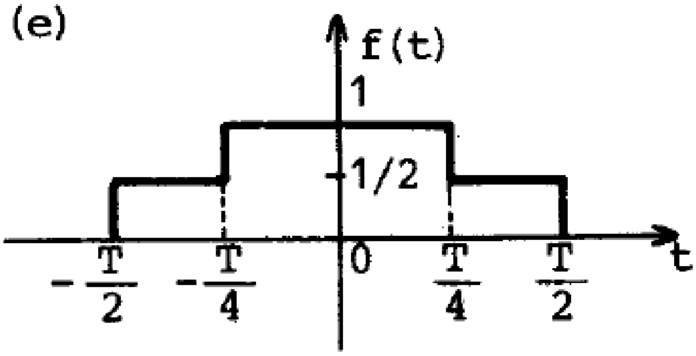
c) $\omega_1 = \sqrt{2}$ και $\omega_2 = 2$ Ο λόγος $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι άρρητος και επομένως η συνάρτηση $y_3(t)$ είναι μη περιοδική.

B

Δίδεται η παρακάτω περιοδική κυματομορφή.

a) Υπολογίστε το φάσμα (πλάτους και φάσης) συχνότητας για n έως 5

b) Βρείτε τη μέση και ενεργό τιμή του σήματος



(Υπόδειξη: $\int \cos axdx = \frac{\sin ax}{a}$, $\int x\cos axdx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x\sin ax}{a}$,

$\int \sin axdx = -\frac{\cos ax}{a}$ και $\int x\sin axdx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x\cos ax}{a}$

$\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}$ και $\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$)

Λύση

$$f(t) = \begin{cases} 1/2 & -\frac{T}{2} \le t \le -\frac{T}{4} \\ 1 & -\frac{T}{4} \le t \le \frac{T}{4} \\ 1/2 & \frac{T}{4} \le t \le \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \phi_n) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega t + \phi_n^*)$$

όπου

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

$$\tan\phi_n = -\frac{B_n}{A_n} \qquad \tan\phi_n^* = \frac{A_n}{B_n}$$

Η περίοδος είναι: $T_0 = T \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{T}\ \frac{rad}{\sec}$

Η συνάρτηση είναι άρτια, επομένως $B_n = 0$

$$A_0 = \frac{1}{T_0}\int_a^{a+T_0} f(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)dt = \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2} + \frac{T}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

Επειδή το ολοκλήρωμα είναι ίσο με το εμβαδόν του σχήματος

$$A_n = \frac{2}{T_0}\int_a^{a+T_0} f(t)\cos(n\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)\cos(n\omega t)dt \Rightarrow \underbrace{A_n = \frac{4}{T_0}\int_0^{T_0/2} f(t)\cos(n\omega t)dt}_{\text{για άρτια συνάρτηση}}$$

$$A_n = \frac{4}{T_0}\int_0^{T_0/2} f(t)\cos(n\omega t)dt = \frac{4}{T}\left\{\int_0^{T/4}\cos(n\omega t)dt + \frac{1}{4}\int_{T/4}^{T/2}\cos(n\omega t)dt\right\}$$

$$= \frac{4}{T}\left\{\left.\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega}\right|_0^{T/4} + \frac{1}{4}\left.\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega}\right|_{T/4}^{T/2}\right\}$$

$$= \frac{4}{T}\left\{\frac{1}{n\frac{2\pi}{T}}\sin(n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}) + \frac{1}{4n\frac{2\pi}{T}}\left[\sin(n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}) - \sin(n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4})\right]\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left\{\sin(n\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{4}\left[\sin(n\pi) - \sin(n\frac{\pi}{2})\right]\right\}$$

n	A_n
0	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{3}{2\pi}$
2	**0**
3	$-\frac{1}{2\pi}$
4	**0**
5	$\frac{3}{10\pi}$

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos n\omega t + B_n\sin n\omega t\right) = \frac{3}{4} + \frac{3}{2\pi}\cos\omega t - \frac{1}{2\pi}\cos 3\omega t + \frac{3}{10\pi}\cos 5\omega t + ...$$

b) Η μέση τιμή είναι ίση με $A_0 = \frac{3}{4}$

Η ενεργός τιμή είναι ίση με $f_{\varepsilon\nu} = \sqrt{P}$

Όπου

$$P = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f^2(t)dt = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} f^2(t)dt = \frac{2}{T}\left\{\int_0^{T/4}dt + \frac{1}{4}\int_{T/4}^{T/2}dt\right\} = \frac{2}{T}\left\{\frac{T}{4} + \frac{1}{4}\frac{T}{4}\right\} = \frac{5}{8}$$

$$= A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2$$

Άρα $f_{\varepsilon\nu} = \sqrt{P} = \sqrt{\frac{5}{8}}$

Το φάσμα πλάτους και φάσης δίδεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = |A_n|$ & $C_0 = A_0$

$\tan\phi_n = -\frac{B_n}{A_n} \Rightarrow \phi_n = 0$ για $n = 1,3,5,\cdots$

Πρόβλημα 3

A

Η ακρίβεια ενός θερμοζεύγους, μετά από διακρίβωση με πρότυπο σύστημα μέτρησης της θερμοκρασίας, ευρέθη $\pm 0.2^{o}C$ για επίπεδο εμπιστοσύνης 95%. Για τον υπολογισμό της συνολικής αβεβαιότητας της θερμοκρασίας σ΄ ένα δοχείο ελήφθη δείγμα από 15 μετρήσεις, για το οποίο προέκυψε μέση τιμή $250.0\ ^{o}C$ και τυπική απόκλιση $0.2\ ^{o}C$.

a) Υπολογίστε την τυχαία και τη συνολική αβεβαιότητα της μέσης τιμής με επίπεδο εμπιστοσύνης 95%.
b) Υπολογίστε την τυχαία και τη συνολική αβεβαιότητα μιας τυχαίας μέτρησης με επίπεδο εμπιστοσύνης 95%.
c) Εάν χρησιμοποιηθεί ένα άλλο θερμοζεύγος με ακρίβεια $\pm 0.1^{o}C$, θα αλλάξει σημαντικά τη συνολική αβεβαιότητα της μέτρησης της θερμοκρασίας για τις παραπάνω περιπτώσεις;

Λύση

Ακρίβεια: $0.2\ ^{0}C$

Μέση τιμή : $250\ ^{0}C$

N=15

$\nu = N - 1 = 15 - 1 = 14$

$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$

Από τον Πίνακα Student $t_{\nu, 1-\frac{a}{2}} = t_{14, 0.975} = 2.145$

$S_x = 0.2\ ^{0}C$

a)

$$P_{\bar{x}} = t_{\nu,1-\frac{a}{2}} S_{\bar{x}} = t_{\nu,1-\frac{a}{2}} \frac{S_x}{\sqrt{N}} = 2.145 \times \frac{0.2}{\sqrt{15}} = 0.11\ ^{o}C$$

$$u_{\bar{x}} = \sqrt{(B_{\bar{x}})^2 + (P_{\bar{x}})^2} = \sqrt{0.2^2 + 0.11^2} = 0.23$$

b) Τυχαία αβεβαιότητα μιας τυχαίας μέτρησης

$$P_x = t_{\nu,1-\frac{a}{2}} S_x = 2.145 \times (0.2) = 0.43$$

$$u_x = \sqrt{(B_x)^2 + (P_x)^2} = \sqrt{(0.2)^2 + (0.43)^2} = 0.474$$

c)

$$B_x = B_{\bar{x}} = 0.1\ ^{o}C$$

i) $u_{\bar{x}} = \sqrt{(B_{\bar{x}})^2 + (P_{\bar{x}})^2} = \sqrt{(0.1)^2 + (0.11)^2} = 0.0221\ ^{o}C$

ii) $u_x = \sqrt{(B_x)^2 + (P_x)^2} = \sqrt{(0.1)^2 + (0.474)^2} = 0.484\ ^{o}C$

Θα έχει μεγαλύτερη επίδραση στο σφάλμα της μέσης τιμής, επειδή το τυχαίο σφάλμα της μέσης τιμής είναι σχεδόν το ίδιο με το συστηματικό. Στην περίπτωση της συνολικής αβεβαιότητας μιας μέτρη σης η επίδραση θα είναι αμελητέα επειδή το τυχαίο σφάλμα είναι μεγαλύτερο του συστηματικού.

B

Η μέτρηση της τοπικής επιτάχυνσης της βαρύτητας μετριέται με ένα απλό εκκρεμές.

Η περίοδος του εκκρεμούς είναι $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ όπου L είναι το μήκος του εκκρεμούς.

Έτσι εάν μετράμε το L και το T, το g υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}.$$

Εάν οι μετρήσεις της περιόδου T και του μήκους L είναι:

$$L = 100 \pm 0.1 \text{ cm}$$

$$T = 2 \pm 0.005 \text{ sec}$$

Υπολογίστε την καλύτερη εκτίμηση για το g και την αβεβαιότητά του.

Λύση

$$\bar{g} = \frac{4\pi^2 \bar{L}}{\bar{T}^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 100}{2^2} = 987\ cm/\sec^2$$

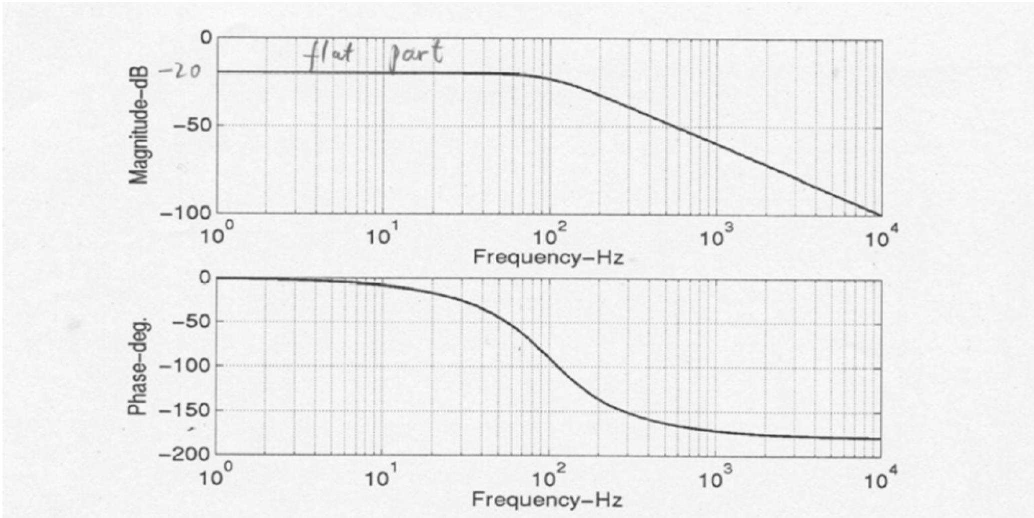
$$\frac{\partial g}{\partial L} = \frac{4\pi^2}{T^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial T} = -\frac{8\pi^2 L}{T^3}$$

$$\Delta g = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial g}{\partial L}\right)_{\bar{L}} u_L\right)^2 + \left(\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_{\bar{T},\bar{L}} u_T\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{2^2}\cdot 0.1\right)^2 + \left(\frac{8\pi^2 \cdot 100}{2^3}\cdot 0.005\right)^2} = 5.03\ cm/\sec^2$$

$$g = 987 \pm 5.03\ cm/\sec^2$$

Πρόβλημα 4
Α.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η απόκριση συχνότητας ενός συστήματος μέτρησης ροής. Οι μονάδες της συνάρτησης απόκρισης συχνότητας, G(jω), είναι σε $Volts/(m^3/s)$.



a) Από το παραπάνω γράφημα, ποιο είναι το εύρος συχνοτήτων για το οποίο η λειτουργία του μετατροπέα πιστεύετε ότι είναι καλή, αιτιολογήστε την απάντησή σας. Ποια είναι τα επιθυμητά χαρακτηριστικά ενός συστήματος ως προς το φάσμα μέτρου και φάσης;
b) Τι τάξεως σύστημα είναι αυτό;
c) Ποια είναι η σταθεροποιημένη απόκριση του συστήματος στην είσοδο: $f(t) = 2 + 0.5(\sin 100t)$
d) Εάν ο συντελεστής απόσβεσης του συστήματος μέτρησης ροής, μειωθεί σημαντικά,
i) Πως θα μεταβληθεί η συνάρτηση απόκρισης συχνότητας του συστήματος ;
ii) Πως αυτό θα επηρεάσει τη βηματική απόκριση του συστήματος;

Λύση

Α) Η λειτουργία του μετατροπέα είναι καλή στην περιοχή 0 έως 10Hz διότι το μέτρο της απόκρισής του είναι αμετάβλητο. Για f=100Hz, το μέτρο της απόκρισης έχει ελαττωθεί εμφανώς από την τιμή που αντιστοιχεί στη συχνότητα $f \approx 0\,\text{Hz}$, έτσι η περιοχή 0 έως 100Hz δεν είναι καλή επιλογή. Τα επιθυμητά χαρακτηριστικά ενός συστήματος στην περιοχή λειτουργίας του είναι σταθερό μέτρο και γραμμική μεταβολή της φάσης με τη συχνότητα. Είναι δύσκολο να συμπεράνει κανείς εύκολα από το παραπάνω σχήμα εάν η φάση μεταβάλλεται γραμμικά, λόγω του λογαριθμικού άξονα συχνότητας. Έτσι ως κριτήριο για την επιλογή της περιοχής λειτουργίας στο πρόβλημα αυτό χρησιμοποιήθηκε αποκλειστικό το διάγραμμα του μέτρου απόκρισης.

Β) Το σύστημα είναι $2^{ας}$ τάξεως, διότι η φάση του συστήματος μεταβάλλεται μεταξύ 0^0 και 180^0 συναρτήσει της συχνότητας.

C) Εάν $f(t) = 2 + 0.5\sin(100t)$ είναι η είσοδος στον μετατροπέα, η έξοδός του είναι

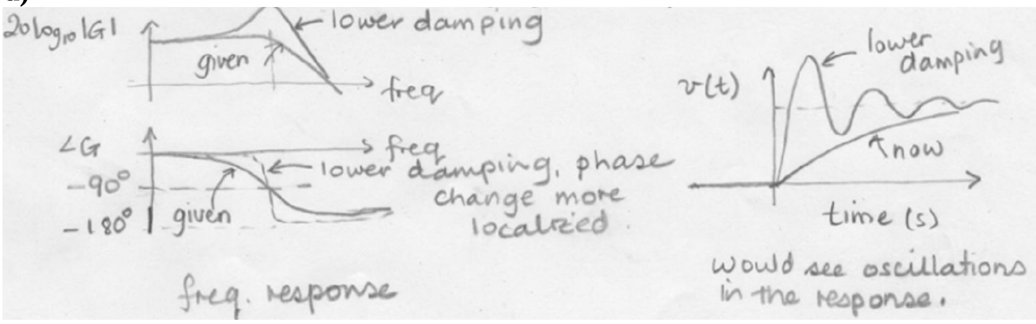
$$y(t) = 2K + 0.5KM(\omega)\sin(100t + \phi(\omega)) = 2K + 0.5|G(j\omega)|\sin(100t + \phi(\omega))$$

Για $f = 0$ Hz $|G(j0)| = |K| = 20\log(|K|)\, db \Rightarrow |K| = 10^{\frac{-20}{20}} = 0.1$ και $\phi(0) = 0^0$

Για $\omega = 100 rad/\sec \Rightarrow f = 15.915$ Hz $|G(j100)| = 10^{\frac{-20}{20}} = 0.1$ και $\phi(100) = 16^0 = 0.28\, rad$

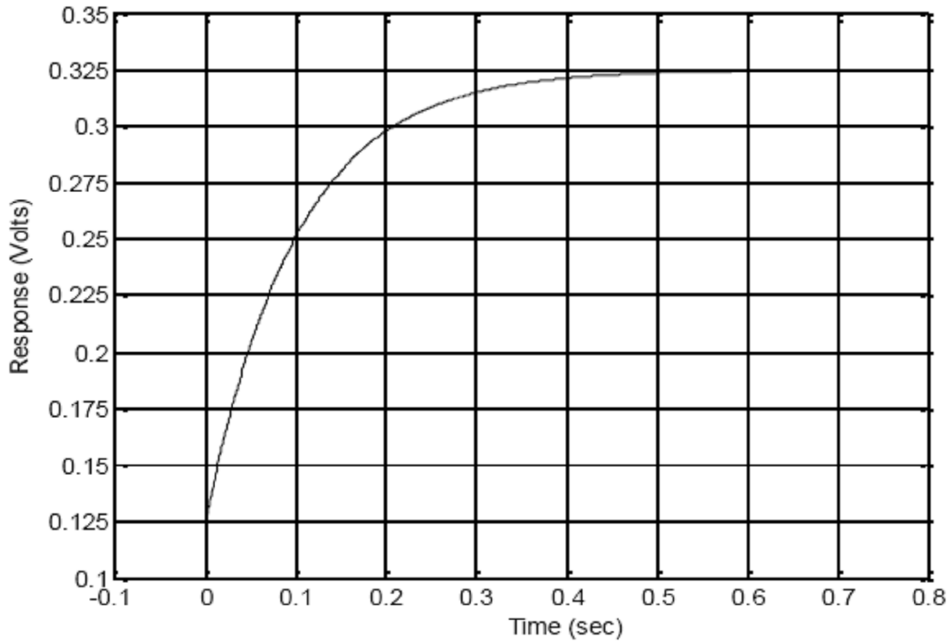
Έτσι $y(t) = 2\times 0.1 + 0.5\times 0.1\sin(100t + 0.28) = 0.2 + 0.05\sin(100t + 0.28)$

d)



B.

Σου δίνει κάποιος ένα θερμοζεύγος και σου λέει ότι δεν γνωρίζ ει τίποτε γι αυτό, εκτός του ότι δουλεύει. Ποιες είναι οι δύο παράμετροι που χρειάζεσαι να ξέρεις για να περιγράψεις πλήρως το σύστημα αυτό;
Για να βρεις αυτές τις παραμέτρους παίρνεις το θερμοζεύγος και το βυθίζεις ξαφνικά σε ζεστό λουτρό νερού του οποίου η θερμοκρασία έχει μετρηθεί χρησιμοποιώντας ένα πρότυπο μέτρο και είναι 65 ^oC. Μετράς τη θερμοκρασία του δωματίου που γίνεται το πείραμα με το ίδιο πρότυπο μέτρο και είναι 25 ^oC. Η απόκριση του θερμοζεύγους φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα. Υπολογίστε τις δύο παραμέτρους του συστήματος. Δείξτε όλες τις λεπτομέρειες.



Υπολογίστε τη σταθεροποιημένη απόκριση του συστήματος στην είσοδο $x(t) = 2 + 10\sin(2t)$.

Λύση

Η απόκριση είναι 1^{ης} τάξης και προσδιορίζεται από το συντελεστή ευαισθησίας K και τη σταθερά χρόνου τ. Ο συντελεστής ευαισθησίας βρίσκεται εύκολα διαιρώντας το εύρος εξόδου με το εύρος εισόδου:

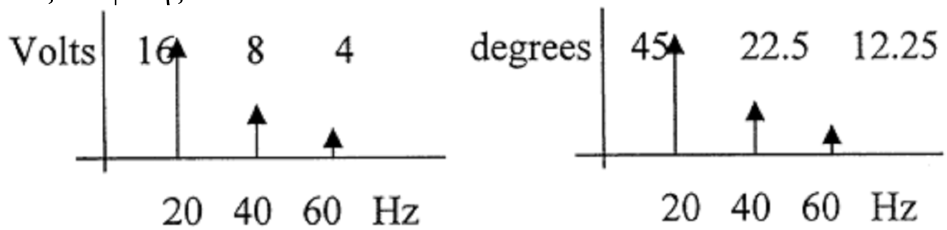
$$K = \frac{y_{ss} - y_0}{x_{ss} - x_0} = \frac{(0.325 - 0.125)V}{(65 - 25)\,^oC} = 0.005\frac{V}{^oC}$$

Η σταθερά χρόνου βρίσκεται από τη χρονική διάρκεια (σχετική με την εφαρμογή της εισόδου) για να αλλάξει η έξοδος κατά 63.2 % της μέγιστης δυνατής αλλαγής. Η μέγιστη δυνατή αλλαγή της εξόδου είναι 0.2 V. Το 63.2% της αλλαγής αυτής είναι 0.126 V. Ψάχνουμε λοιπόν τη χρονική στιγμή που η έξοδος έχει αλλάξει κατά 0.126 V, δηλαδή τη χρονική στιγμή που η έξοδος έχει την τιμή $y(\tau) - y_0 = 0.126 \Rightarrow y(\tau) = y_0 + 0.126 = 0.125 + 0.126 = 0.251$ V. Από το διάγραμμα προκύπτει $t = 0.1$ sec. Έτσι, η σταθερά χρόνου είναι $\tau = 0.1$ sec.

Πρόβλημα 5

A

Να γράψετε τη συνημιτονοειδή σειρά Fourier που αντιστοιχεί στο παρακάτω φάσμα πλάτους και φάσης:



Λύση

$$y(t) = C_1\cos(\omega_1 t + \phi(\omega_1)) + C_2\cos(\omega_2 t + \phi(\omega_2)) + C_3\cos(\omega_3 t + \phi(\omega_3))$$

$$= 16\cos(2\pi\times 20\times t + \frac{\pi}{4}) + 8\cos(2\pi\times 40\times t + \frac{\pi}{8}) + 4\cos(2\pi\times 60\times t + \frac{\pi}{16})$$

$$= 16\cos(40\pi t + \frac{\pi}{4}) + 8\cos(80\pi t + \frac{\pi}{8}) + 4\cos(120\pi t + \frac{\pi}{16})$$

C

Είσαι υπεύθυνος για τη σχεδίαση ενός συστήματος ανάκτησης δεδομένων για σήματα με περιοχή τιμών ± 5 Volts και με διακριτική ικανότητα τουλάχιστον 4 mVolts. Η μέγιστη συχνότητα του σήματος εισόδου είναι 1000 Hz. Προδιέγραψε ένα αναλογικό ψηφιακό μετατροπέα Α-Ψ, με θετική κωδικοποίηση που να πληροί τις παραπάνω προϋποθέσεις.

a) Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός ψηφίων του Α-Ψ;
b) Ποιο είναι το μέγιστο σφάλμα κβαντοποίησης του Α-Ψ;
c) Ποια είναι η πραγματική περιοχή τιμών του Α-Ψ;
d) Εάν ο ρυθμός δειγματοληψίας μπορεί να πάρει τις τιμές 10000 Hz, 1000 Hz, και 500 Hz, ποια είναι η συχνότητα του ψηφιοποιημένου σήματος όταν το σήμα εισόδου έχει συχνότητα 1000 Hz. Ποια απ’ αυτές τις συχνότητες δειγματοληψίας συνιστάς;
e) Εάν η είσοδός του είναι -3.45 V, ποιος είναι ο κωδικός στην έξοδό του.
f) Εάν ο Α-Ψ μετατροπέας αυτός είχε ως έξοδο τον κωδικό 165 ποια είναι η περιοχή των τάσεων εισόδου που αντιστοιχούν στον παραπάνω κωδικό αριθμό;

Λύση

a)

$$Q = \frac{V_{ru} - V_{rl}}{2^N} = \frac{5-(-5)}{2^N} = \frac{10}{2^N} \le 0.004\ V \Rightarrow 2^N \ge 2500 \Rightarrow N\log 2 \ge \log 2500 \Rightarrow N \ge 11.29$$

Έτσι, ο ελάχιστος αριθμός ψηφίων που απαιτείται να έχ ει ο Α-Ψ μετατροπέας είναι $N = 12$

b)

$$Q = \frac{V_{ru} - V_{rl}}{2^N} = \frac{5-(-5)}{2^{12}} = 0.002441\,\mathrm{V}$$

και το μέγιστο σφάλμα κβαντοποίησης είναι $\frac{Q}{2} = 0.001221\,\mathrm{V}$

c) Η πραγματική περιοχή τιμών εσόδου του Α -Ψ μετατροπέα είναι:

$(V_{rl}, V_{ru} - Q) = (-5\ , 4.99756)$ V d)

Εάν η συχνότητα του σήματος είναι $f = 1000$ Hz, ο απαιτούμενος ρυθμός δειγματοληψίας είναι $f_s \geq 2f = 2000$ Hz. Επομένως ο συνιστώμενος διαθέσιμος ρυθμός δειγματοληψίας είναι $f_s = 10000$ Hz. Στην περίπτωση αυτή, το ψηφιοποιημένο σήμα έχει συχνότητα 1000 Hz. Εάν χρησιμοποιηθεί 1000 ή 500 Hz ρυθμός δειγματοληψίας (δεν ικανοποιείται το κριτήριο δειγματοληψίας του Nyquist) και παρουσιάζονται φαινόμενα αναδίπλωσης.

Έτσι εάν $f_s = 1000$ Hz, η μέγιστη ανακτούμενη συχνότητα είναι εκείνη του Nyquist $f_N = \frac{f_s}{2} = 500$ Hz. Έτσι η συχνότητα εισόδου, $f = 1000$ Hz, με το συγκεκριμένο ρυθμό δειγματοληψίας εμφανίζεται ως $\frac{f}{f_N} = \frac{1000}{500} = 2.0 \Rightarrow f_{ap} = 0$ Hz.

Ομοίως εάν ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι $f_s = 500$ Hz, η μέγιστη ανακτούμενη συχνότητα είναι εκείνη του Nyquist $f_N = \frac{f_s}{2} = 250$ Hz. Έτσι η συχνότητα εισόδου, $f = 1000$ Hz, με το συγκεκριμένο ρυθμό δειγματοληψίας εμφανίζεται ως $\frac{f}{f_N} = \frac{1000}{250} = 4.0 \Rightarrow f_{ap} = 0$ Hz.

e)

$$D = \mathrm{int}\left\{\frac{V_i - V_{rl}}{Q}\right\} = \mathrm{int}\left\{\frac{-3.45 - (-5)}{0.002441}\right\} = \mathrm{int}\{634.88\} = 635$$

f)

$$\widehat{V_i} = D \cdot Q + V_{rl} = 165 \cdot (0.002441) - 5 = -4.59674\ V$$

$$\widehat{V_i} - \frac{Q}{2} \leq V_i \leq \widehat{V_i} + \frac{Q}{2} \Rightarrow -4.72034 \leq V_i \leq -4.47624$$