ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Κεφαλαίου 2

ΣΤΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

Μέση Τιμή

$$\bar{y} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} y(t)dt$$

Ενεργός Τιμή

$$y_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)dt}$$

ΣΧΕΣΕΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΟΤΗΤΑΣ

Ο υπολογισμός των συντελεστών του αναπτύγματος Fourier γίνεται με τη βοήθεια ορισμένων σχέσεων ορθογωνικότητας. Οι ίδιες σχέσεις ορθογωνικότητας χρησιμοποιούνται και σε άλλες εφαρμογές της ανάλυσης Fourier.

Ένα σύνολο συναρτήσεων $\phi_k(t)$ είναι ορθογωνικό στο διάστημα $[t_0, t_0 + T]$, όταν για δύο τυχαίες συναρτήσεις $\phi_m(t)$ και $\phi_n(t)$ που ανήκουν στο σύνολο αυτό, ισχύει η σχέση

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \phi_m(t)\phi_n(t)dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ r_n & m = n \end{cases}$$

Τριγωνομετρικά περιοδικά σήματα

Για συνημιτονικές και ημιτονικές συναρτήσεις ισχύουν οι σχέσεις:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega t)dt = 0 \quad m \neq 0$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega t)dt = 0 \quad \forall m$$

Ισχύουν επίσης οι ακόλουθες σχέσεις ορθογωνικότητας:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega t)\sin(n\omega t)dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & m = n \neq 0 \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega t)\cos(n\omega t)dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & m = n \neq 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega t)\sin(n\omega t)dt = 0 \quad \forall m, n$$

Εκθετικά περιοδικά σήματα

Για εκθετικά σήματα της μορφής $e^{j\omega t}$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{jm\omega t}dt = 0 \quad m \neq 0$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{jm\omega t} e^{-jn\omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(m-n)\omega t} dt = \begin{cases} T & m = n \neq 0 \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ FOURIER

Τριγωνομετρική σειρά Fourier

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t \right) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \phi_n) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega t + \phi_n^*)$$

όπου

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} y(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} y(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} y(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin(n\omega t) dt$$

$$C_0 = A_0 \qquad C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

$$\tan\phi_n = -\frac{B_n}{A_n} \qquad \tan\phi_n^* = \frac{A_n}{B_n}$$

Εκθετική σειρά Fourier

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega t}$$

όπου

$$D_n = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} y(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) e^{-jn\omega t} dt$$

$$D_n = \frac{1}{2} C_n e^{j\phi_n} \qquad D_{-n} = \frac{1}{2} C_n e^{-j\phi_n}$$

$$\left| D_{-n} \right| = \left| D_n \right| = \frac{1}{2} C_n \quad n \neq 0 \text{ και } D_0 = A_0 = C_0$$

$$D_n = \frac{1}{2} \left(A_n - jB_n \right) \quad A_n = D_n + D_{-n} \quad B_n = j\left(D_n - D_{-n} \right)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ PARSEVAL

Τριγωνομετρική σειρά Fourier

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t \right) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \phi_n) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega t + \phi_n^*)$$

Η μέση ισχύς του σήματος είναι:

$$P_y = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} y^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n^2 + B_n^2 \right) = C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2$$

Εκθετική σειρά Fourier

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega t}$$

Η μέση ισχύς του σήματος είναι:

$$P_y = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} y^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T y^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2$$

Η ενεργός τιμή είναι ίση με $f_{\varepsilon\nu} = \sqrt{P}$

ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΣΗΜΑΤΟΣ ΣΤΟ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ FOURIER

Εάν η συνάρτηση $y(t)$ είναι συμμετρική ο προσδιορισμός των συντελεστών του αναπτύγματος Fourier γίνεται ευκολότερος:

Άρτια Συνάρτηση

Εάν η συνάρτηση $y(t)$ ικανοποιεί τη σχέση $y(t) = y(-t)$ καλείται άρτια.

Τότε $A_0 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T_0} y(t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} y(t)dt$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)\cos(n\omega t)dt \Rightarrow A_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} y(t)\cos(n\omega t)dt \text{ και}$$

$B_n = 0$

D_n καθαροί πραγματικοί αριθμοί

Το άθροισμα δύο ή περισσότερων άρτιων συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση. Με την πρόσθεση μιας σταθεράς τιμής σε μια άρτια συνάρ τηση παραμένει άρτια.

Περιττή Συνάρτηση

Εάν η συνάρτηση $y(t)$ ικανοποιεί τη σχέση $y(t) = -y(-t)$ καλείται περιττή.

Τότε $A_0 = 0$ $A_n = 0$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)\sin(n\omega t)dt \Rightarrow B_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} y(t)\sin(n\omega t)dt \text{ και}$$

D_n καθαροί φανταστικοί αριθμοί

Το άθροισμα δύο ή περισσότερων περιττών συναρτήσεων είναι περιττή συνάρτηση. Με την πρόσθεση μιας σταθεράς τιμής σε μια περιττή συνάρτηση παύει να είναι περιττή. Το γινόμενο δύο περιττών συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση.

Συνάρτηση με συμμετρία μισού κύματος

Εάν η περιοδική συνάρτηση $y(t)$ ικανοποιεί τη σχέση $y(t) = -y(t + T/2)$ λέμε ότι έχει συμμετρία μισού κύματος και εμφανίζονται στο ανάπτυγμα Fourier μόνο αρμονικές περιττής τάξεως.

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣ ΕΙΣ ΚΑΙ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

$\sin(x) = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$ και $-\cos(x) = \cos(x + \pi)$

$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$ $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$ $\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$\cos\alpha\,\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\,\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]$$

Στοιχειώδεις έννοιες μιγαδικών αριθμών

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2} \qquad \sin t = \frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}$$

Στοιχειώδεις τύποι ολοκληρωμάτων

$$\int \cos axdx = \frac{\sin ax}{a}, \ \int x\cos axdx = \frac{\cos ax}{a^2}+\frac{x\sin ax}{a},$$

$$\int \sin axdx = -\frac{\cos ax}{a} \text{ και } \int x\sin axdx = \frac{\sin ax}{a^2}-\frac{x\cos ax}{a}$$

$$\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a} \text{ και } \int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x-\frac{1}{a}\right)$$

Φάσμα πλάτους εκθετικής μορφής

Το φάσμα πλάτους υπολογίζεται για την εκθετική μορφή της σειράς ως ακολούθως: Για τη συχνότητα 0, παραμένει αμετάβλητο: $D_0 = C_0$ και για τις άλλες συχνότητες είναι άρτια συνάρτηση της συχνότητας: $\left|D_n\right| = \left|D_{-n}\right| = \frac{C_n}{2}$. Έτσι, όλο το υπόλοιπο φάσμα $\left|D_n\right|$ έχει το μισό του πλάτους C_n για θετικά n και για αρνητικά n προκύπτει από την αναδίπλωση του φάσματος που αντιστοιχεί για θετικά n γύρω από τον κατακόρυφο άξονα.

Φάσμα φάσης εκθετικής μορφής

Το φάσμα φάσης είναι θ_n για θετικό n και $-\theta_n$ για αρνητικό n.