Μετρήσεις Τεχνικών Μεγεθών

Δυναμική Απόκριση Συστήματος

Δυναμική Απόκριση Συστήματος

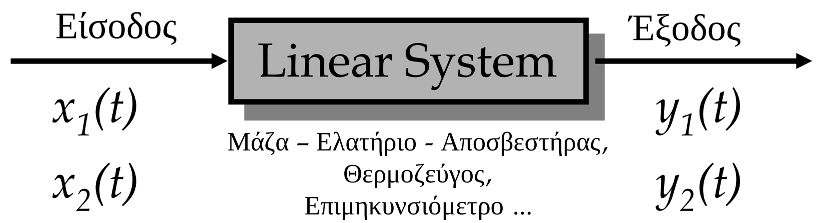
- **Μοντέλο εισόδου/εξόδου Γραμμικών Δυναμικών Συστημάτων.**

- **Χρονική Απόκριση Δυναμικών Συστημάτων.**
  - Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων
    - Μεταβατική και σταθεροποιημένη απόκριση

- **Απόκριση Συχνότητας Δυναμικού Συστήματος.**
  - Ανασκόπιση Μιγαδικών μεταβλητών.
  - Συνάρτηση Απόκρισης Συχνότητας.
  - Χαρακτηριστικά Μέτρου και Φάσης

- **Ολοκλήρωση Συστήματος.**

Γραμμικό Σύστημα



$A\, x_1(t) + B\, x_2(t)$

$\text{Σύνθετη Είσοδος} \Rightarrow \sum \text{Απλών Εισόδων}$ $\qquad\qquad$ $\sum \Rightarrow \text{Σύνθετη Έξοδος}$

- Ικανοποιείται η αρχή της υπερθέσεως.
- Δύναται να μοντελοποιηθεί από Συνήθεις Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις.
- Εάν η είσοδος είναι ημιτονοειδές σήμα συχνότητας f_1, η έξοδος θα είναι ημιτονοειδές σήμα με την ίδια συχνότητα f_1.

Μοντέλο Εισόδου/Εξόδου

- 1) Ταυτοποίηση Συστήματος: Μοντελοποίηση Συστήματος με την βοήθεια της εισόδου και εξόδου.
- 2) Προσομοίωση Συστήματος: Πρόβλεψη εξόδου, με τη βοήθεια του μοντέλου του συστήματος.
- 3) Αντίστροφο Φιλτράρισμα: Χρήση του μοντέλου του συστήματος και της εξόδου για την εύρεση της εισόδου.

- Εξίσωση Εισόδου – Εξόδου:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 x + b_1 \frac{dx}{dt} + \ldots + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + b_m \frac{d^m x}{dt^m}$$

  – n τάξεως Συνήθης Γραμμική Διαφορική Εξίσωση (Σύστημα n τάξεως)
- Συνάρτηση Απόκρισης Συχνότητας.
- Συνάρτηση Μεταφοράς.

Χρονική Απόκριση – (Επίλυση Δ.Ε.)

- **Έστω ότι η σχέση εισόδου - εξόδου ενός συστήματος περιγράφεται από τη Δ.Ε:**

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 x + b_1 \frac{dx}{dt} + \cdots + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + b_m \frac{d^m x}{dt^m}$$

- **Η χρονική απόκριση του συστήματος y(t) στην άγνωστη είσοδο x(t) είναι:**

$$y(t) = \underbrace{y_P(t)}_{\text{Ειδική Λύση}} + \underbrace{y_H(t)}_{\text{Ομογενής Λύση}}$$

(Σταθεροποιημένη Λύση) (Μεταβατική Λύση)

- **Βήματα για την επίλυση της Δ.Ε.:**
  - **(1) Εύρεση της ειδικής λύσης y_P(t).**
  - **(2) Εύρεση της ομογενούς λύσης y_H(t).**
  - **(3) Άθροισμα των y_P(t) και y_H(t) για την εύρεση της συνολικής λύσης** y(t).
  - **(4) Εύρεση των αγνώστων συντελεστών με χρήση των αρχικών συνθηκών.**

Χρονική Απόκριση – (Επίλυση Δ.Ε.)

- **<u>Σύστημα 1ης Τάξεως</u>** (π.χ. θερμοζεύγος)

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = K x$$

όπου τ είναι η σταθερά χρόνου και K είναι η στατική ευαισθησία.

⇒ <u>Βηματική Απόκριση</u> – Η έξοδος ενός συστήματος σε βηματική αλλαγή της εισόδου.

Παράδειγμα :

Ένα θερμοζεύγος περιγράφεται από Δ.Ε. 1ης τάξεως με σταθερά χρόνου τ = 0.1 sec και ευαισθησία K = 0.005 V/^{o}C. Το θερμοζεύγος βρίσκεται σε θερμοκρασία δωματίου T_o = 25 ^{o}C όταν η θεμοκρασία ξαφνικά αλλάζει στους T = 80 ^{o}C τη χρονική στιγμή t = 0 sec. Ποιά είναι η απόκριση του θερμοζεύγους;

Χρονική Απόκριση – (Επίλυση Δ.Ε.)

- **<u>Ειδική Λύση</u>** ($y_P(t)$)

  Η είσοδος είναι σταθερή στους $T = 80\ ^oC$

  Η σταθεροποιημένη λύση είναι:

$$y_P(t) = V_{ss}$$

Αντικαθιστούμε στην Δ.Ε. και λύνουμε ως προς V_{ss}

Χρονική Απόκριση – (Επίλυση Δ.Ε.)

- **<u>Ομογενής Λύσης</u>** ($y_H(t)$)

    Εάν η είσοδος $x(t) = 0$ και επιλύσουμε την εξίσωση :

$$\tau \frac{d}{dt} y_H + y_H = 0$$

Εάν $$y_H(t) = Ae^{\lambda t}$$

Χρονική Απόκριση – (Επίλυση Δ.Ε.)

- **Συνολική Λύσης** (*y(t)*)

$$y(t) = y_P(t) + y_H(t)$$
$$= V_{ss} + A e^{\lambda t}$$

- **Αρχικές Συνθήκες**

Για $t = 0$ sec, $y(0) = K\,T_O = 0.125$ V

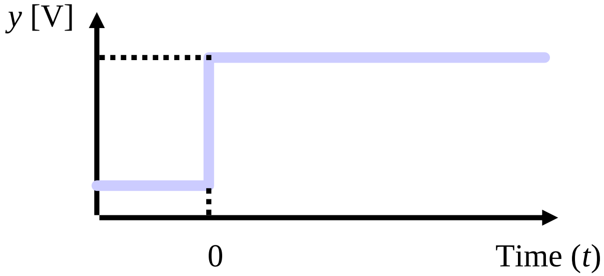
Χρονική Απόκριση

- **Συνολική Λύσης (*y(t)*)**

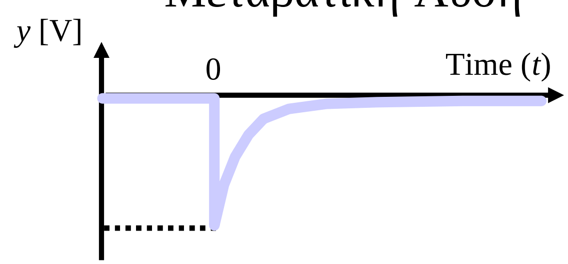
$$y(t) = \underbrace{K\ T}_{y_P(t)} + \underbrace{K\left(T_o - T\right)e^{-\frac{t}{\tau}}}_{y_H(t)}$$

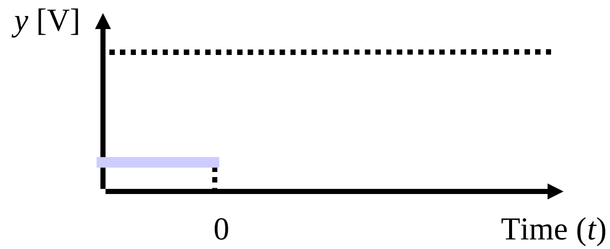
Ειδική Λύση Ομογενής Λύσης

Σταθεροποιημένη Λύση



Μεταβατική Λύση





Χρονική Απόκριση

t	$y_H/K(T-T_o)$	$(y-KT_o)/K(T-T_o)$
τ	0.368	0.632
2τ	0.135	0.865
3τ	0.050	0.950
4τ	0.018	0.982

Χρονική Απόκριση – (Επίλυση Δ.Ε.)

- **<u>Σύστημα 2ης Τάξεως</u>** (π.χ. επιταχυνσιόμετρο, ελατήριο – αποσβεστήρας, μάζα)

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{dy}{dt}+y=K\,x$$

όπου, ω_n είναι η φυσική ιδιοσυχνότητα, ζ ο συντελεστής απόσβεσης και K η στατική ευαισθησία του συστήματος.

π.χ.

$$\frac{m}{k}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{b}{k}\frac{dy}{dt}+y=K\,x$$

όπου *m* η μάζα, *b* είναι ο συντελεστής τριβής, *k* η σταθερά του ελατηρίου, και K η στατική ευαισθησία.

Χρονική Απόκριση – (Επίλυση Δ.Ε.)

- <u>**Ομογενής Λύσης**</u> **(** $y_H(t)$ **)**

  Εάν η είσοδος $x(t) = 0$ και επιλύσουμε την εξίσωση :

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{dy}{dt} + y = 0$$

με $$y_H(t) = A\,e^{\lambda t}$$

Χρονική Απόκριση – (Επίλυση Δ.Ε.)

- **Χαρακτηριστική Εξίσωση:**

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n{}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}{2}$$

- **Τέσσερις Περιπτώσεις:**
  1 Χωρίς απόσβεση ($\zeta = 0$)

  2 Υπο-απόσβεση ($0 < \zeta < 1$)

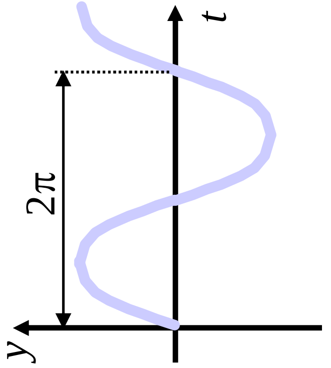
  3 Κρίσιμη Απόσβεση ($\zeta = 1$)

  4 Υπερ-απόσβεση ($\zeta > 1$)

Απόκριση Συχνότητας

- **Περιοδικά (Ημιτονοειδή) Σήματα**

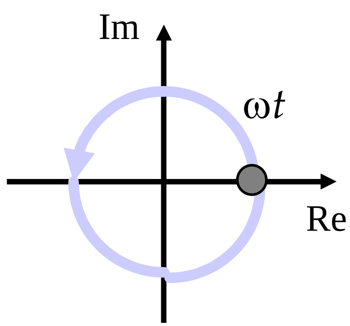
$$\begin{cases} e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t) \\ e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t) \end{cases}$$

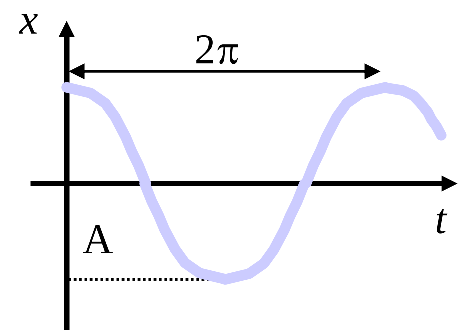


$$\mathrm{Re}[z] = x = A\cos(\omega t)$$

$$\mathrm{Im}[z] = y = A\sin(\omega t)$$

$$\begin{cases} \cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right) \\ \sin(\omega t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right) \end{cases}$$





Απόκριση Συχνότητας

- **Ανασκόπιση Μιγαδικών Αριθμών**

$$z = \sigma + j\omega$$

$$= Ae^{j\phi} \quad (\text{Εξίσωση Euler})$$

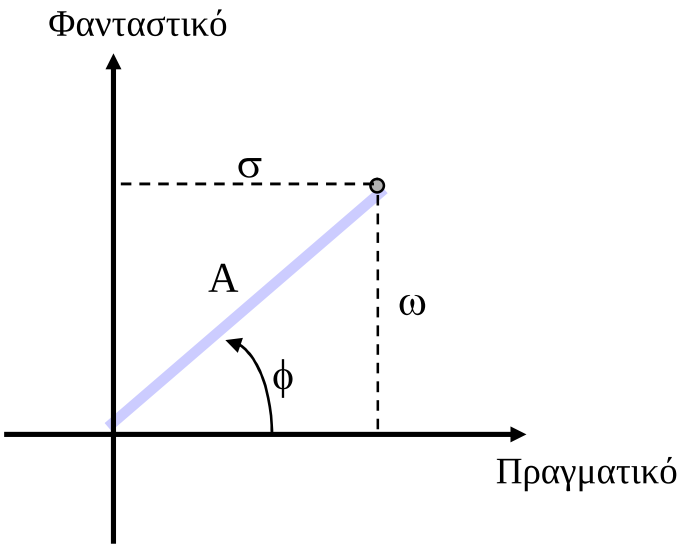
σ είναι το πραγαμτικό μέρος

ω είναι το φανταστικό μέρος

Α είναι το μέτρο **(|z|)**

ϕ είναι η φάση (Arg[z])

$$\begin{cases} e^{j\phi} = \cos(\phi) + j\sin(\phi) \\ e^{-j\phi} = \cos(\phi) - j\sin(\phi) \end{cases}$$



Απόκριση Συχνότητας

- Αριθμητική Μιγαδικών

$$z_1 = a + jb = A_1 e^{j\phi_1} \; ; \qquad z_2 = c + jd = A_2 e^{j\phi_2}$$

$$z_1 \pm z_2 = (a \pm c) + j(b \pm d) =$$

$$z_1 z_2 = (a + jb)(c + jd) =$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + jb)}{(c + jd)} =$$

Π.χ. : Κάντε τις παρακάτω πράξεις μιγαδικών αριθμών**:**

(1) (3+j4)(4+j3) (2) (3+j4)/(4+j3) (3) (3+j4)(3-j4)

Απόκριση Συχνότητας

- **Συζυγείς Μιγαδικοί**

$$\begin{cases} z = \underbrace{A\cos(\omega t)}_{x} + j\underbrace{A\sin(\omega t)}_{y} = Ae^{j\omega t} \\ z^* = A\cos(\omega t) - jA\sin(\omega t) \end{cases}$$

αποτελούν ένα ζεύγος συζυγών αριθμών

Παρατήρηση :

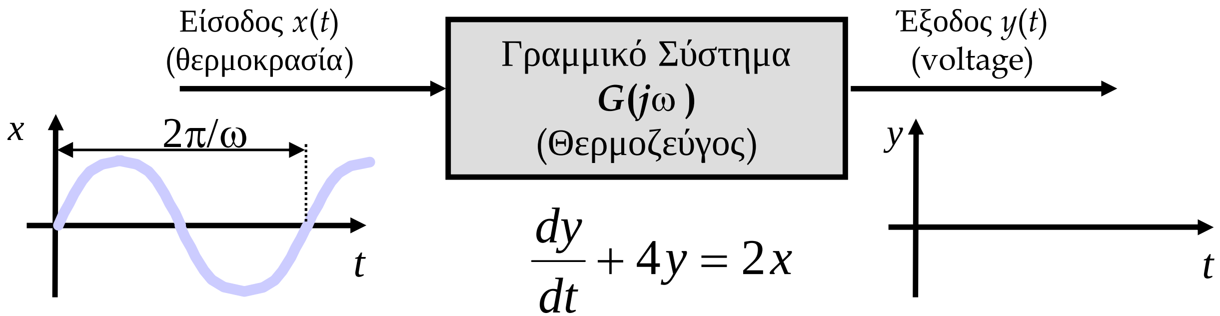
$$zz^* = \left(Ae^{j\omega t}\right)\left(Ae^{-j\omega t}\right)$$
$$= A^2$$

- **Διαφόριση**

Εαν $z = Ae^{j\omega t}$

$$\frac{d}{dt}z = \frac{d}{dt}Ae^{j\omega t}$$
$$= (j\omega)Ae^{j\omega t}$$

Απόκριση Συχνότητας



$$\frac{dy}{dt} + 4y = 2x$$

Είσοδος**:** $x(t) = 3\sin(\omega t)$ Έξοδος **:** $y(t) = Ae^{-4t} + B_1\sin(\omega t) + B_2\cos(\omega t)$

Σταθεροποιημένη Έξοδος :

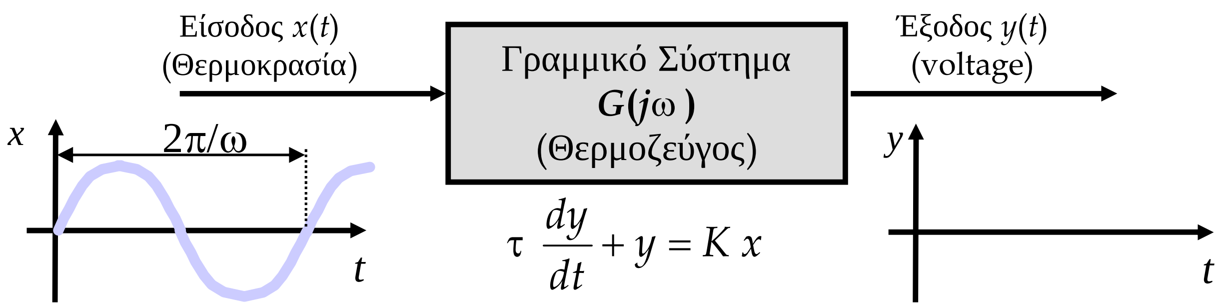
$$\frac{d}{dt}\left[B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t)\right] + 4\left[B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t)\right] = 2 \times 3 \sin(\omega t)$$

$$B_1 = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{\omega^2 + 4^2} \quad \text{and} \quad B_2 = \frac{-2\cdot 3\omega}{\omega^2 + 4^2}$$

$$y_{ss}(t) = \frac{2\cdot 3}{\sqrt{\omega^2 + 4^2}}\left[\frac{4}{\sqrt{\omega^2+4^2}}\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+4^2}}\cos(\omega t)\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\omega^2+4^2}} 3\sin\left(\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{4}\right)\right)$$

Απόκριση Συχνότητας



$$\tau \frac{dy}{dt} + y = K\,x$$

Είσοδος: $x(t) = A\sin(\omega t)$ ⇒ Σταθεροποιημένη Έξοδος $y(t)$;

Εύρεση Ειδικής Λύσης !! ⇒ Εάν $y(t) = B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t)$

$$\tau \frac{d}{dt}\left[B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t)\right] + \left[B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t)\right] = K\;A\sin(\omega t)$$

$$B_1 = \frac{KA}{\tau^2\omega^2 + 1} \quad \text{and} \quad B_2 = \frac{-(\tau\omega)KA}{\tau^2\omega^2 + 1}$$

$$y(t) = \frac{KA}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}}\left[\frac{1}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}}\sin(\omega t) - \frac{\tau\omega}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}}\cos(\omega t)\right]$$

$$= \frac{K}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}} A\sin\left(\omega t - \tan^{-1}(\tau\omega)\right) = \qquad A\sin(\omega t + \qquad)$$

Απόκριση Συχνότητας

Ερώτηση : Πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε το G, έτσι ώστε να περιγράφει την επίδραση της συχνότητας στο μέτρο και στη φάση περιοδικών σημάτων εισόδου;

Έστω μιγαδικό περιοδικό σήμα εισόδου:

Εάν : $x(t) = Ae^{j\omega t} \Rightarrow$ Να βρεθεί η σταθεροποιημένη έξοδος *y(t)* !!

Εάν $\boldsymbol{y(t)=GAe^{j\omega t}}$ (G μπορεί να είναι μιγαδικός αριθμός)

$$\tau \frac{d}{dt}\left(G\,Ae^{j\omega t}\right) + G\,Ae^{j\omega t} = K\,Ae^{j\omega t}$$

$$\begin{cases} |G| = \dfrac{K}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}} \\ \mathrm{Arg}(G) = -\tan^{-1}(\tau\omega) \end{cases}$$

$$G\left(\tau j\omega + 1\right) Ae^{j\omega t} = K\,Ae^{j\omega t}$$

$$G = \frac{K}{\tau j\omega + 1}$$

$$y(t) = |G|Ae^{j\left[\omega t + \mathrm{Arg}(G)\right]}$$

$$=$$

Απόκριση Συχνότητας

- **Συνάρτηση Απόκρισης Συχνότητας (ΣΑΣ)**
  Δίδεται το γραμμικό σύστημα G:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 x + b_1 \frac{dx}{dt} + \cdots + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + b_m \frac{d^m x}{dt^m}$$

Η Συνάρτηση Απόκρισης Συχνότητας *G(jω)* είναι :

$$G(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \cdots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1 (j\omega) + a_0}$$

-Χαρακτηρίζει τη σταθεροποιημένη απόκριση ενός γραμμικού, χρονικά ανεξάρτητου συστήματος, με μια περιοδική είσοδο $x(t) = A\sin(\omega t)$:

$$y(t) = G(j\omega)x(t) = |G(j\omega)| A \sin\left[\omega t + Arg\left(G(j\omega)\right)\right]$$

- Αποτελεί για ένα γραμμικό σύστημα το λόγο της μιγαδικής εξόδου $y(t) = Y e^{j\omega t}$ προς τη μιγαδική περιοδική είσοδο $x(t) = X e^{j\omega t}$;, π.χ. $G(j\omega) = Y / X$

Απόκριση Συχνότητας

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{\mathrm{Arg}(G(j\omega))}$$

Είσοδος **:** $x(t) = A\sin(\omega t)$ $\Rightarrow$ Σταθεροποιημένη Εξοδος **:** $y_{ss}(t)$

$$y_{ss}(t) = \qquad A\sin(\omega t + \qquad)$$

Απόκριση Συχνότητας

- **Υπολογισμός της (ΣΑΣ) από τις Διαφορικές Εξισώσεις**

  Έστω το παρακατω σύστημα :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 x + b_1 \frac{dx}{dt} + \cdots + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + b_m \frac{d^m x}{dt^m}$$

(1) Έστω η είσοδος $x(t) = X\, e^{j\omega t}$.

(2) Έστω η σταθεροποιημένη έξοδος $y(t) = Y\, e^{j\omega t}$.

(3) Αντικαθιστώντας τα $x(t)$, $y(t)$ στη διαφορική εξίσωση :

$$\left[a_n (j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1 (j\omega) + a_0\right] Y e^{j\omega t}$$

$$= \left[b_m (j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \cdots + b_1 (j\omega) + b_0\right] X e^{j\omega t}$$

(4) Λύνουμε ως προς $G = Y / X$.

Απόκριση Συχνότητας

Παράδειγμα : Συνάρτηση Απόκρισης Συχνότητας Συστήματος 2ης Τάξεως

$$\frac{m}{k}\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{b}{k}\frac{dv}{dt} + v = K a$$

(1) Έστω $a(t) = Ae^{j\omega t}$.
(2) Έστω $v(t) = Ve^{j\omega t}$.
(3) Αντικαθιστώντας τα $a(t)$ και $v(t)$ στη Διαφορική Εξίσωση έχουμε :

$$\frac{m}{k}\frac{d^2}{dt^2}\left(Ve^{j\omega t}\right) + \frac{b}{k}\frac{d}{dt}\left(Ve^{j\omega t}\right) + \left(Ve^{j\omega t}\right) = K\left(Ae^{j\omega t}\right)$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{\frac{m}{k}(j\omega)^2 + \frac{b}{k}(j\omega) + 1} =$$

Απόκριση Συχνότητας

- **Σύστημα 1ης Τάξης**
  Διαφορική Εξίσωση

$$\tau \frac{d}{dt} y + y = Kx$$

  Συνάρτηση Απόκρισης Συχνότητας

$$G(j\omega) = \frac{K}{\tau j\omega + 1}$$

  – Μέτρο

$$\left|G(j\omega)\right| = \frac{K}{\sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}}$$

  – Φάση

$$\mathrm{Arg}\left[G(j\omega)\right] = -\tan^{-1}(\tau\omega)$$

- **Σύστημα 2ης Τάξης**
  Διαφορική Εξίσωση

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{dy}{dt} + y = Kx$$

  Συνάρτηση Απόκρισης Συχνότητας

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\frac{2\zeta\omega}{\omega_n} + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}$$

  – Μέτρο

$$\left|G(j\omega)\right| = \frac{K}{\sqrt{\frac{4\zeta^2\omega^2}{\omega_n^2} + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2}}$$

  – Φάση

$$\mathrm{Arg}\left[G(j\omega)\right] = -\tan^{-1}\left[\frac{2\zeta\omega}{\omega_n} \Big/ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)\right]$$

Απόκριση Συχνότητας

Παράδειγμα: Ένα θερμοζεύγος περιγράφεται από την παρακάτω Δ.Ε. 1ης Τάξεως

$$0.1\dot{y} + y = 0.003x$$

Να βρεθούν : (1) Η Συνάρτηση Απόκρισης Συχνότητας

(2) Η Σταθεροποιημένη Απόκριση του θερμοζεύγους, στη θερμοκρασία εισόδου :

$$x(t) = 4\cos(30\pi t)$$

(3) Η Σταθεροποιημένη Απόκριση του θερμοζεύγους, στη θερμοκρασία εισόδου :

$$x(t) = 25 + 4\cos(30\pi t)$$

Παράδειγμα: Ένα θερμοζεύγος έχει απόκριση συχνότητας:

$$G(j\omega) = \frac{V}{T} = \frac{0.003}{0.1j\omega + 1}$$

Βρείτε τη Δ.Ε. Που περιγράφει το θεροζεύγος.

Απόκριση Συχνότητας

Παράδειγμα: Ένα επιταχυνσιόμετρο περιγράφεται από την παρακάτω Δ.Ε.

$$\ddot{V} + 4\pi\dot{V} + 400\pi^2 V = 800\pi^2 A$$

όπου *V* είναι η τάση εξόδου και *A* η επιτάχυνση. Να υπολογιστούν τα εξής :

(1) Η συνάρτηση απόκρισης συχνότητας του επιταχυνσιόμετρου.

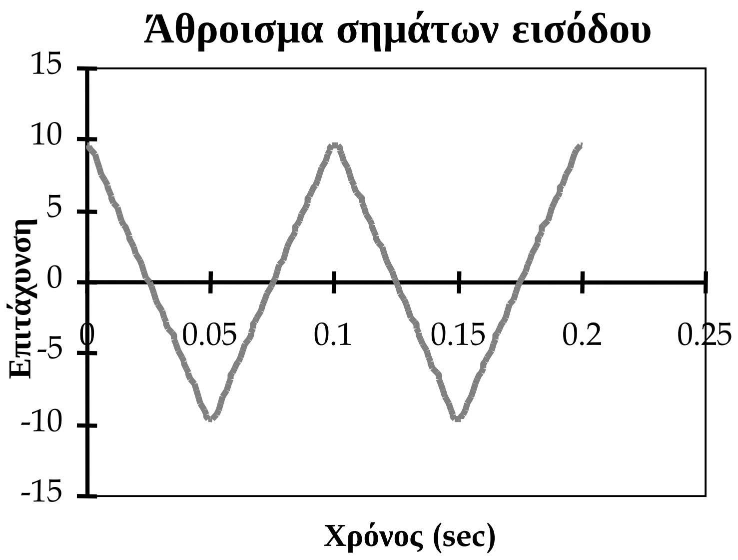
(2) Η σταθεροποιημένη απόκριση για καθεμιά από τις ακόλουθες εισόδους :

Είσοδος (*A*)	Έξοδος (*V*)	Είσοδος (*A*)	Έξοδος (*V*)
8.105 cos(20πt)		0.165 cos(7×20πt)	
0.901 cos(3×20πt)		0.100 cos(9×20πt)	
0.324 cos(5×20πt)		0.067 cos(11×20πt)	

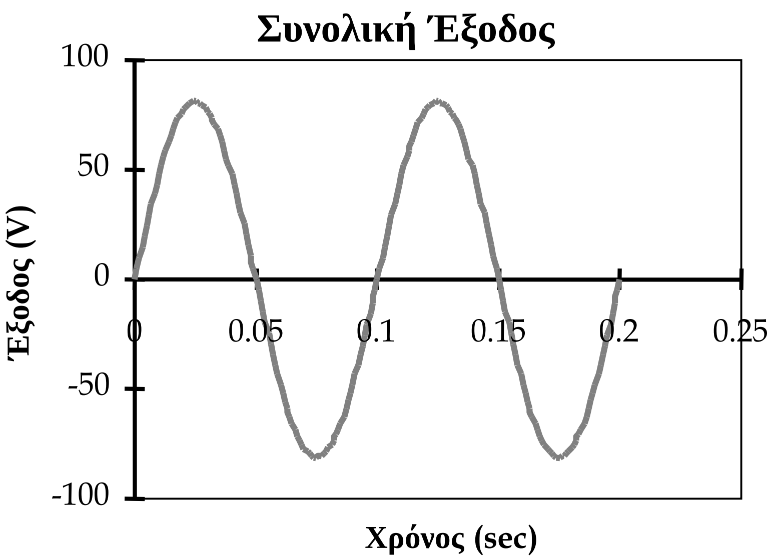
Απόκριση Συχνότητας

Παράδειγμα: (Συνέχεια)

Άθροισμα και των έξι σημάτων εισόδου.



Άθροισμα και των έξι σημάτων εξόδου.



Ερ. : Τι πήγε λάθος;

Απ. : Κανένα, αυτή ήταν η αναμενόμενη συμπεριφορά!

Απόκριση Συχνότητας

- **Σύστημα 1ης Τάξης**

  Διαφορική Εξίσωση

$$\tau \frac{d}{dt} y + y = Kx$$

  Συνάρτηση Απόκρισης Συχνότητας

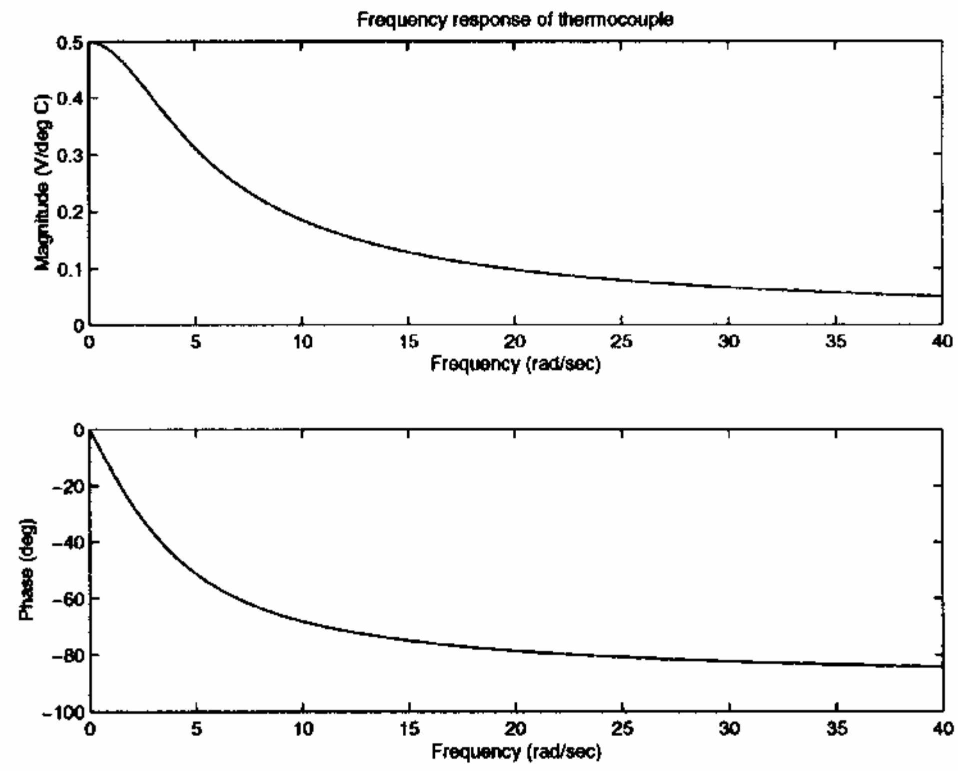
$$G(j\omega) = \frac{K}{\tau j\omega + 1}$$

  – Μέτρο (Κέρδος)

$$\left|G(j\omega)\right| = \frac{K}{\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}}$$

  – Φάση

$$\mathrm{Arg}\left[G(j\omega)\right] = -\tan^{-1}(\tau\omega)$$



Απόκριση Συχνότητας

- **Σύστημα 2ης Τάξης**

  Διαφορική Εξίσωση

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{dy}{dt}+y=Kx$$

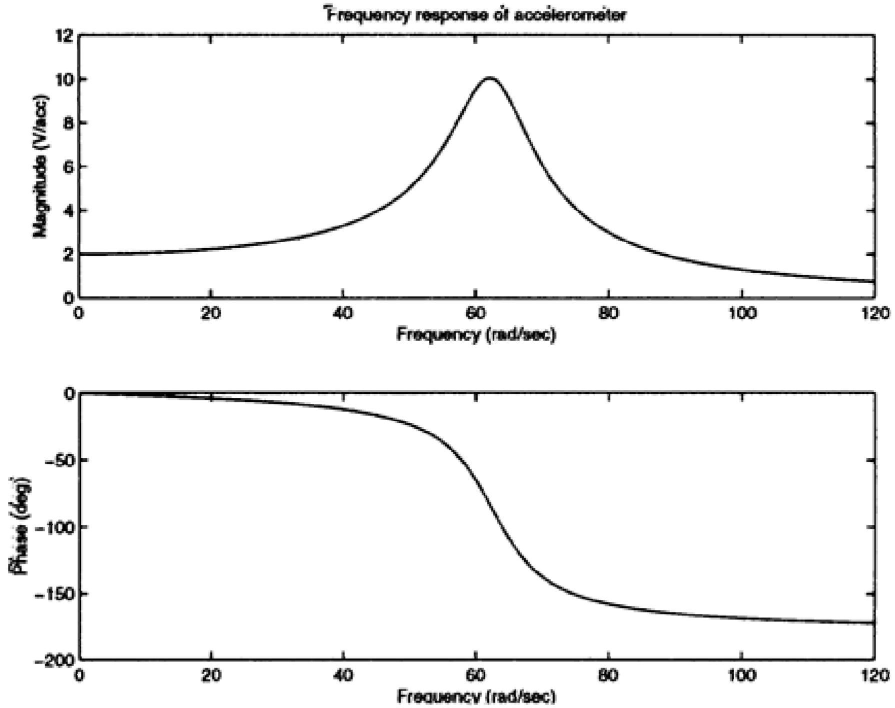
  Συνάρτηση Απόκρισης Συχνότητας

$$G(j\omega)=\frac{K}{j\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}+\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}$$

  – Μέτρο (Κέρδος)

$$\left|G(j\omega)\right|=\frac{K}{\sqrt{\frac{4\varsigma^2\omega^2}{\omega_n^2}+\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2}}$$

  – Φάση



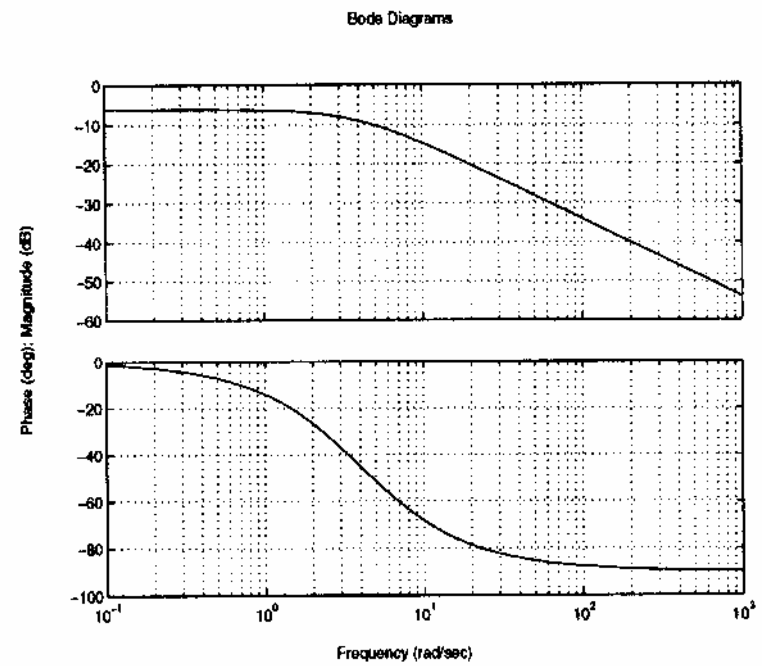
$$\mathrm{Arg}\left[G(j\omega)\right]=-\tan^{-1}\left[\frac{2\varsigma\omega}{\omega_n}\Big/\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)\right]$$

Απόκριση Συχνότητας – Διάγραμμα Bode

- **Σύστημα 1ης Τάξης**

  Συνάρτηση Απόκρισης Συχνότητας

$$G(j\omega) = \frac{K}{\tau\, j\omega + 1}$$



  – Μέτρο (Κέρδος)

$$\left|G(j\omega)\right| = \frac{K}{\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}}$$

  – Φάση

$$\mathrm{Arg}\left[G(j\omega)\right] = -\tan^{-1}(\tau\omega)$$

<u>Διάγραμμα Bode</u>

- *Διάγραμμα <u>dB Μέτρου</u> συναρτήσει <u>Log Συχνότητας</u>*

$$\Rightarrow dB\ \text{Μέτρου} = 20\log_{10}\left(\left|G(j\omega)\right|\right)$$

- *Διάγραμμα <u>Γωνίας Φάσης</u> συναρτήσει <u>Log Συχνότητας</u>*

Απόκριση Συχνότητας – Διάγραμμα Bode

- **Σύστημα 2ης Τάξης**
  Συνάρτηση Απόκρισης Συχνότητας

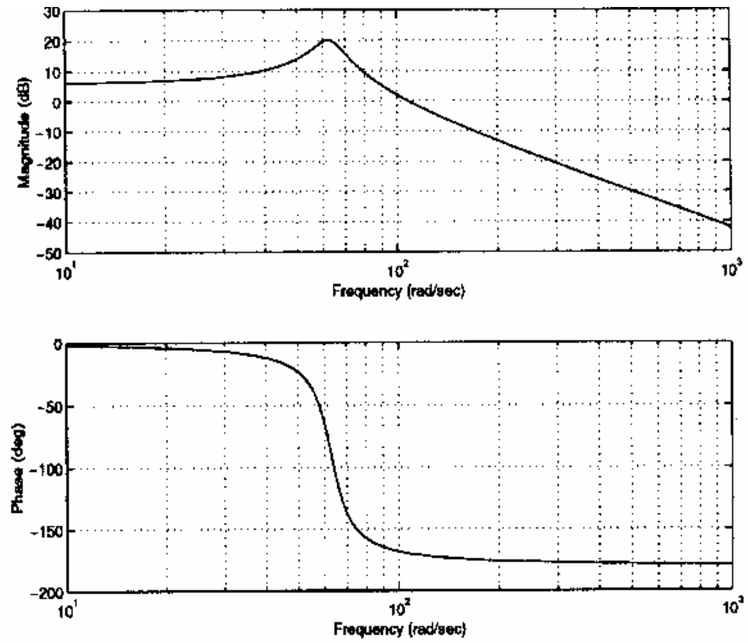
$$G(j\omega) = \frac{K}{j\frac{2\varsigma\omega}{\omega_n} + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}$$

  – Μέτρο (Κέρδος)

$$\left|G(j\omega)\right| = \frac{K}{\sqrt{\frac{4\varsigma^2\omega^2}{\omega_n^2} + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2}}$$

  – Φάση

$$\mathrm{Arg}\left[G(j\omega)\right] = -\tan^{-1}\left[\frac{2\varsigma\omega}{\omega_n} \Big/ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)\right]$$



Χαρακτηριστικά Μέτρου Και Φάσης

- **Σύστημα 1ης Τάξης**
  - Συνάρτηση Απόκρισης Συχνότητας

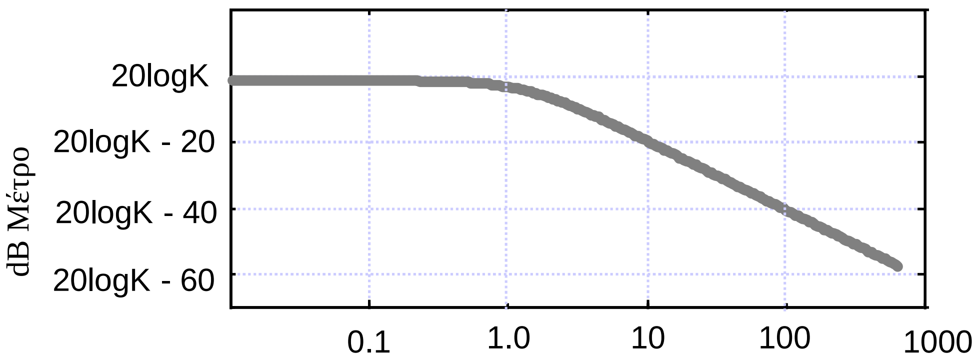
$$G(j\omega) = \frac{K}{\tau j\omega + 1}$$

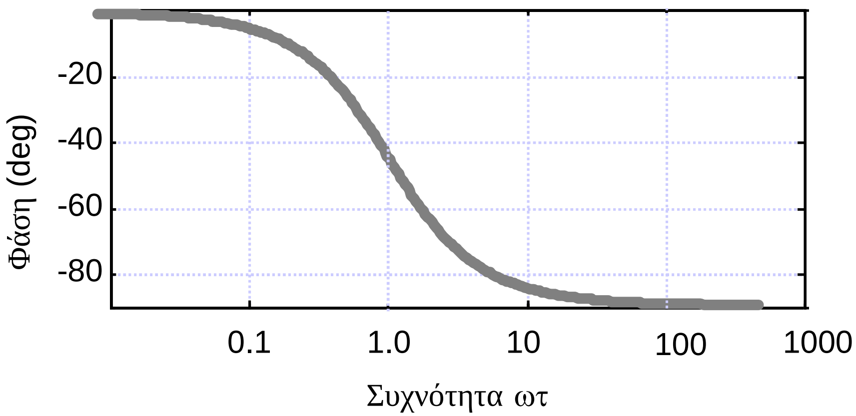
  - Μέτρο (Κέρδος)

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}}$$

  - Φάση

$$\text{Arg}[G(j\omega)] = -\tan^{-1}(\tau\omega)$$





$\omega \to 0$

$|G(j\omega)| \to K$ και $\text{Arg}[G(j\omega)] \to 0^\circ$

$\omega \to \infty$

$\frac{d|G(j\omega)|}{d\omega} \to -20$ dB/dec και $\text{Arg}[G(j\omega)] \to -90^\circ$

Χαρακτηριστικά Μέτρου Και Φάσης

- **Σύστημα 2ης Τάξης**

  Συναρτηση Απόκρισης Συχνότητας

$$G(j\omega)=\frac{K}{j\dfrac{2\zeta\omega}{\omega_n}+\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}$$

– Μέτρο (Gain)

$$\left|G(j\omega)\right|=\frac{K}{\sqrt{\dfrac{4\zeta^2\omega^2}{\omega_n^2}+\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2}}$$

– Φάση

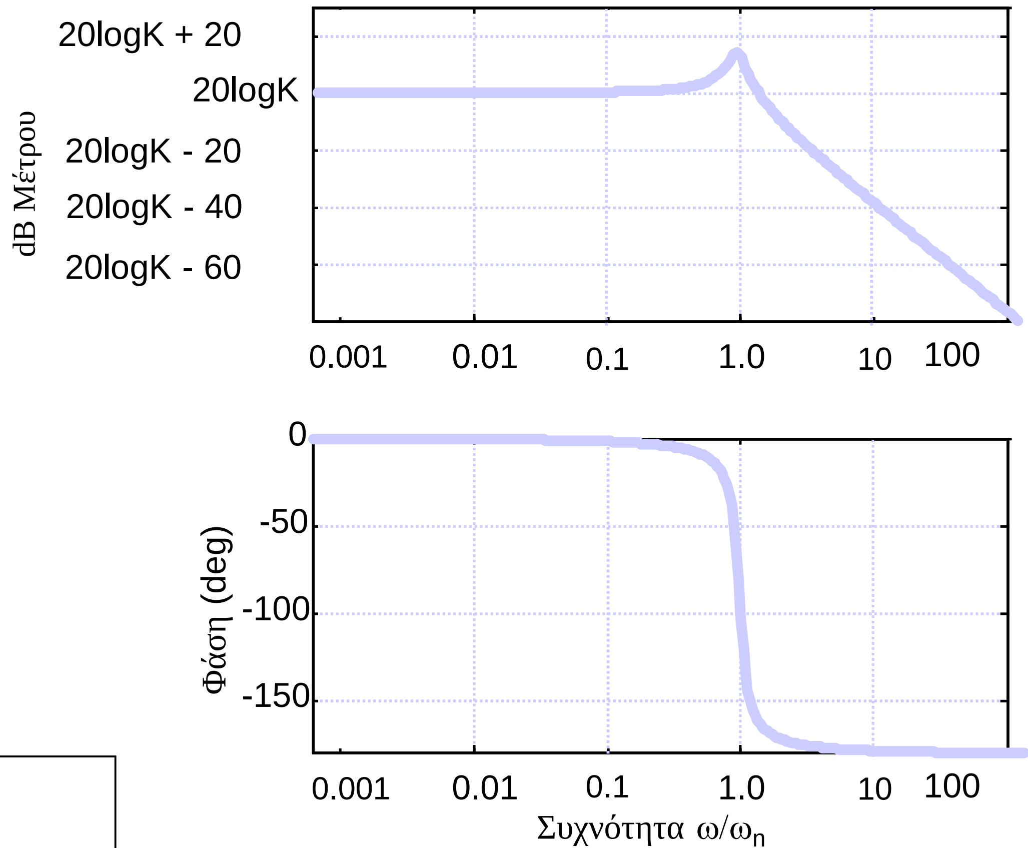
$$\text{Arg}\left[G(j\omega)\right]=-\tan^{-1}\left[\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\Big/\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)\right]$$

$\omega\to 0$

$\left|G(j\omega)\right|\to K$ και $\text{Arg}\left[G(j\omega)\right]\to 0^\circ$

$\omega\to\infty$

$\dfrac{d\left|G(j\omega)\right|}{d\omega}\to -40\text{ dB/dec}$ και $\text{Arg}\left[G(j\omega)\right]\to -180^\circ$



Χαρακτηριστικά Μέτρου Και Φάσης

- **Σύστημα 2ης Τάξης** (συνέχεια)
  - Μέγιστο Μέτρου

$\max|G(j\omega)|$ συμβαίνει όταν

$$\omega = \omega_{res} = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

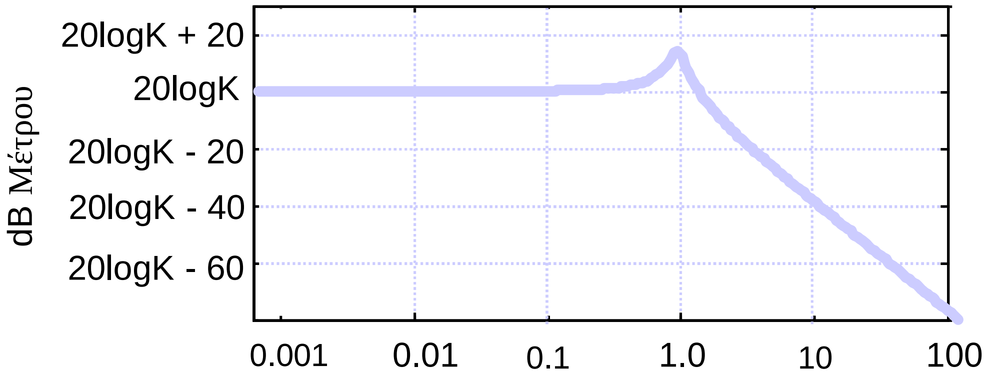
ω_{res} είναι η συχνότητα συντονισμού.

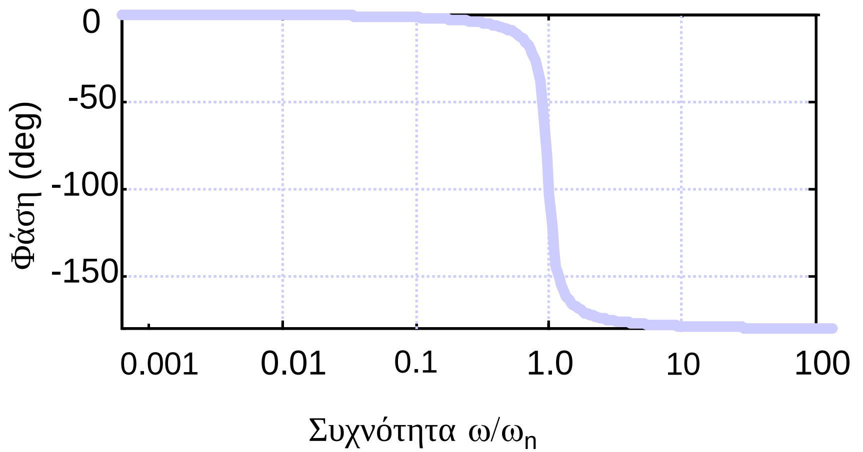
  - Κρίσιμη Απόσβεση

  - **Όταν $\omega = \omega_n$:**

$$|G(j\omega_n)| =$$

$$\text{Arg}[G(j\omega_n)] = -\tan^{-1}\left[2\zeta\omega_n\omega/\left(\omega_n^2 - \omega_n^2\right)\right] =$$

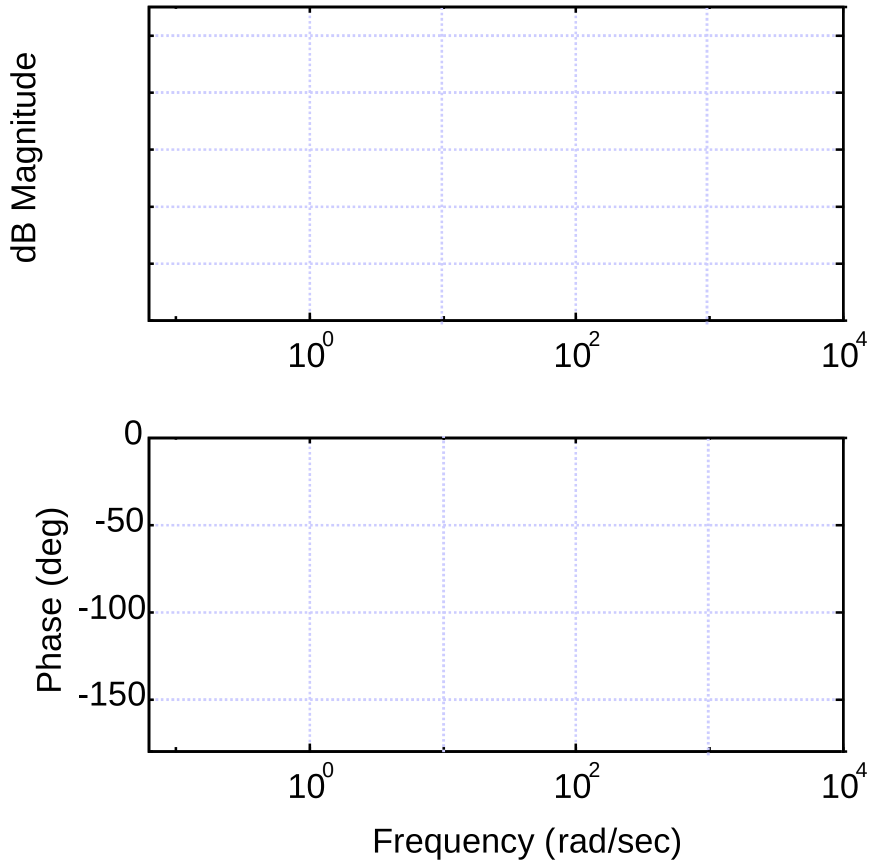




Απόκριση Συχνότητας

Άσκηση: Βρείτε τη συνάρτηση απόκρισης συχνότητας του παρακάτω συστήματος 1ης Τάξης και σχεδιάστε το διάγραμμα Bode.

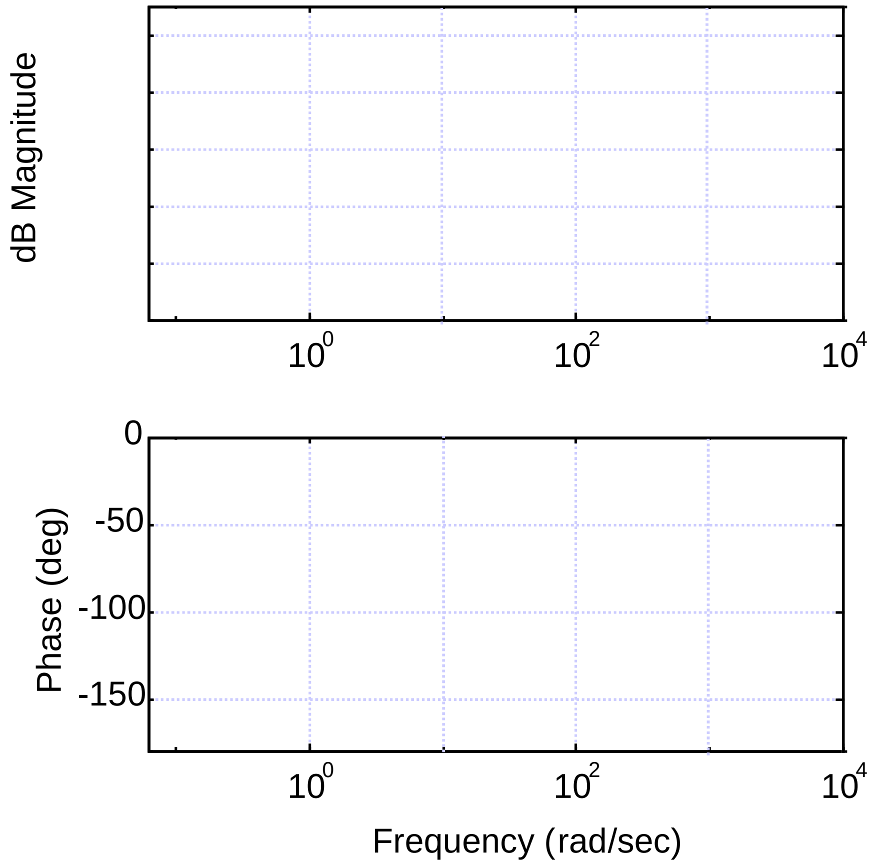
$$0.05\dot{y} + y = 10x$$



Απόκριση Συχνότητας

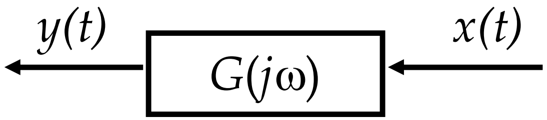
Άσκηση: Βρείτε τη συνάρτηση απόκρισης συχνότητας του παρακάτω συστήματος 2ης Τάξης και σχεδιάστε το διάγραμμα Bode.

$$\ddot{y} + 400\dot{y} + 10000y = 80000x$$



Ολοκλήρωση Συστήματος

- **Απλή Συσκευή**



$$G(j\omega) = \left|G(j\omega)\right| e^{j\phi(\omega)}$$

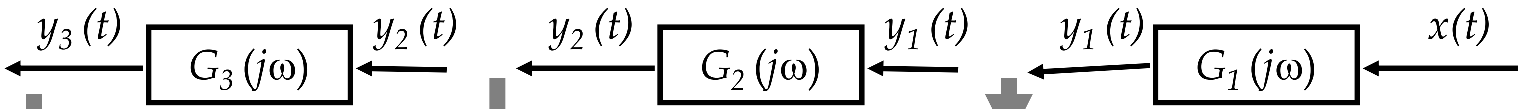
$$x(t) = Ae^{j\omega t}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= G(j\omega)Ae^{j\omega t} \\ &= \left|G(j\omega)\right| e^{j\phi(\omega)} Ae^{j\omega t} \\ &= \left|G(j\omega)\right| Ae^{j\phi(\omega)} e^{j\omega t} \\ &= \left|G(j\omega)\right| Ae^{j(\omega t+\phi(\omega))} \end{aligned}$$

Ολοκλήρωση Συστήματος

- **Πολλές Συσκευές** (Με την υπόθεση οτι δεν υπάρχουν επιδράσεις φορτίου)

$$G_3(j\omega) = |G_3(j\omega)| e^{j\phi_3(\omega)} \qquad G_2(j\omega) = |G_2(j\omega)| e^{j\phi_2(\omega)} \qquad G_1(j\omega) = |G_1(j\omega)| e^{j\phi_1(\omega)}$$



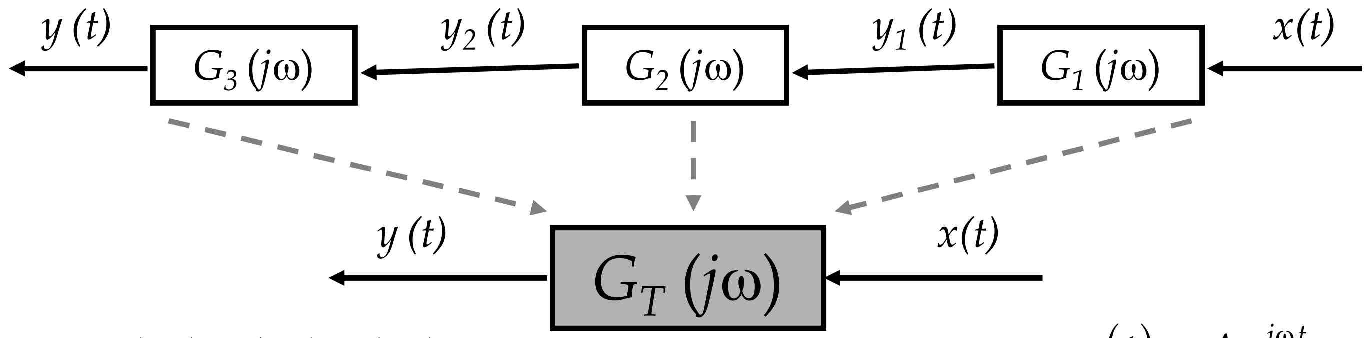
$$x(t) = Ae^{j\omega t}$$

$$y_1(t) = G_1(j\omega)Ae^{j\omega t} = |G_1(j\omega)|Ae^{j(\omega t + \phi_1(\omega))}$$

$$y_2(t) = G_2(j\omega)y_1(t) = G_2(j\omega)G_1(j\omega)x(t) = |G_2(j\omega)||G_1(j\omega)|Ae^{j(\omega t + \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega))}$$

$$y_3(t) = G_3(j\omega)y_2(t) = G_3(j\omega)G_2(j\omega)y_1(t) = G_3(j\omega)G_2(j\omega)G_1(j\omega)x(t) = |G_3(j\omega)||G_2(j\omega)||G_1(j\omega)|Ae^{j(\omega t + \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega) + \phi_3(\omega))}$$

Ολοκλήρωση Συστήματος



$$x(t) = Ae^{j\omega t}$$

$$y(t) = \underbrace{G_3(j\omega)G_2(j\omega)G_1(j\omega)}_{G_T(j\omega)}x(t)$$

$$= |G_3(j\omega)||G_2(j\omega)||G_1(j\omega)|Ae^{j(\omega t + \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega) + \phi_3(\omega))}$$

$$G_T(j\omega) = G_3(j\omega)G_2(j\omega)G_1(j\omega)$$

$$|G_T(j\omega)| = |G_3(j\omega)||G_2(j\omega)||G_1(j\omega)|$$

$$\text{Arg}[G_T(j\omega)] = \text{Arg}[G_1(j\omega)] + \text{Arg}[G_2(j\omega)] + \text{Arg}[G_3(j\omega)]$$