# Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πειραιά

**Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών**

**Τμήμα Μηχανολογίας**

## <u>Μηχανική Ρευστών</u>

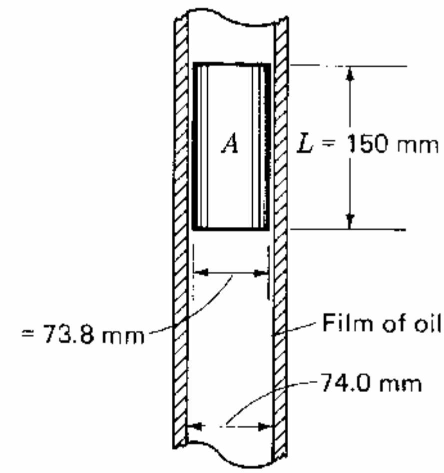
Εαρινό Εξάμηνο 2009

(Παραδοτέα 4-05-2009)

## ΕΡΓΑΣΙΑ Ι

**Πρόβλημα 1**

Ένας συμπαγής κύλινδρος Α, μάζας 2.5 kg ολισθαίνει κα τακόρυφα εντός σωλήνα, όπως στο παρακάτω Σχήμα. Ο κύλινδρος είναι τέλεια κεντραρισμένος με τον άξονα του σωλήνα. Μεταξύ της κυλινδρικής επιφάνειας και αυτής του εσωτερικού του σωλήνα παρεμβάλλεται ένα στρώμα λαδιού. Ο συντελεστής ιξώδους του λαδιού είναι $7 \times 10^{-3}\ N \cdot s / m^2$. Ποια είναι η τελική ταχύτητα του κυλίνδρου; Αγνοήστε την αντίσταση του αέρα.




**Λύση**

Υποθέτουμε ότι η ταχύτητα στο στρώμα του λιπαντικού μεταβάλλεται γραμμικά. Έτσι έχουμε,

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{V - 0}{0.0001 m} = 10000 V \quad s^{-1}$$

Η διατμητική τάση τ στο τοίχωμα του κυλίνδρου είναι

$$\tau = \mu \frac{\partial V}{\partial n} = \left(7 \times 10^{-3}\right)\left(10000 V\right) = 70 V \quad Pa$$

Τώρα, εάν εξισώσουμε το βάρος του κυλίνδρου με την ιξώδη δύναμη που αναπτύσσεται όταν ο κύλινδρος αποκτήσει την τελική του ταχύτητα, προκύπτει:

$$W = (\tau)(\pi D)(L) = (2.5)(9.81) = (70 V_T)(\pi)(0.0738)(0.150)$$

Από την οποία έχουμε: $V_T = 10.07\, m/s$

**Πρόβλημα 2**

Να υπολογιστούν: (α) το δυναμικό ιξώδες (σε centipoise) και (β) το κινηματικό ιξώδες (σε stokes) αέρα στους 500°C και πίεση 150 kPa, χρησιμοποιώντας τον Εκθετικό Νόμο και το Νόμο του Sutherland.

**Λύση**

**Πρόβλημα 3**
Ο τύπος υπολογισμού της οπισθέλκουσας δύναμης σφαίρας σε χαμηλή τα χύτητα $V$ των Stokes-Oseen δίδεται από την ακόλουθη σχέση

$$F = 3\pi\mu DV + \frac{9\pi}{16}\rho V^2 D^2$$

όπου $D =$ η διάμετρος της σφαίρας, $\mu =$ το ιξώδες και $D =$ η πυκνότητα. Είναι ο τύπος αυτός διαστατικά ομοιογενής;

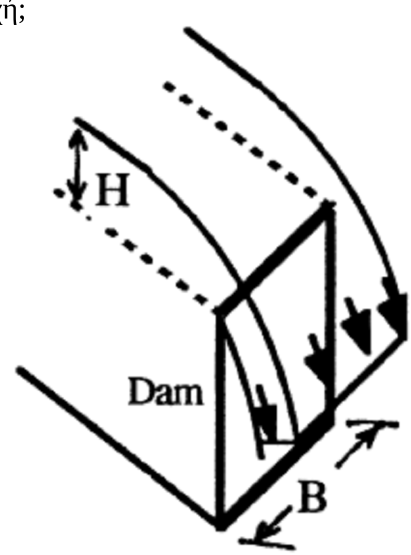
**Λύση**
Γράφοντας τον παραπάνω τύπο σε διαστασιακή μορφή δηλαδή και θεωρώντας ότι όλες οι σταθερές (3,π,9,16) είναι καθαροί αριθμοί προκύπτει:

$$\{F\} = \{3\pi\}\{\mu\}\{D\}\{V\} + \left\{\frac{9\pi}{16}\right\}\{\rho\}\{V\}^2\{D\}^2 \; ?$$

ή: $\left\{\frac{ML}{T^2}\right\} = \{1\}\left\{\frac{M}{LT}\right\}\{L\}\left\{\frac{L}{T}\right\} + \{1\}\left\{\frac{M}{L^3}\right\}\left\{\frac{L^2}{T^2}\right\}\{L^2\}?$

Όλοι οι όροι έχουν διαστάσεις .Έτσι ο τύπος υπολογισμού της Stokes-Oseen είναι διαστατικά ομοιογενής.

**Πρόβλημα 4**
Η παροχή όγκου $Q$ της ροής υπερχείλισης ενός φράγματος είναι ανάλογη του πλάτους $B$ του φράγματος και μεταβάλλεται επίσης με το συντελεστή βαρύτητας $g$ και το ύψος υπερχείλισης $H$, όπως φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα. Ποια είναι η μόνη δυνατή διαστατι κά ομοιογενής σχέση που εκφράζει την παροχή;




**Λύση**
Γνωρίζουμε ότι το Q είναι ανάλογο του B και εξαρτάται από το H και g.
Η σχέση παροχής όγκου παίρνει την μορφή $Q = Bf(H, g)$ η οποία σε διαστατική μορφή γράφεται: $Q = Bf(H, g) = \left\{\frac{L^2}{T}\right\}$

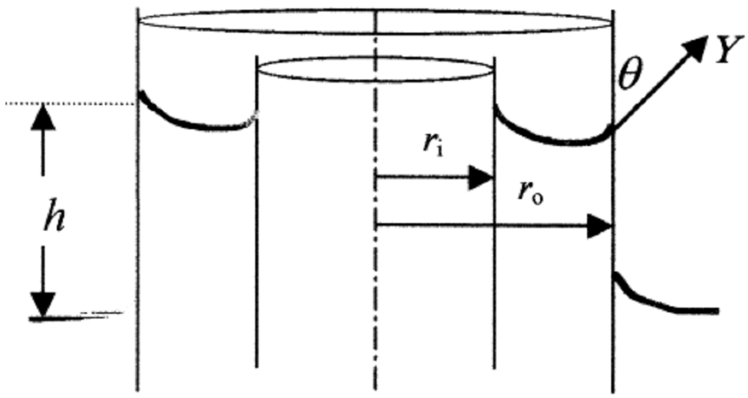
Η συνάρτηση f(H,g) έχει διαστάσεις $\left\{\frac{L^2}{T}\right\}$, όπου ο χρόνος προκύπτει μέσω του g. Έτσι το g πρέπει να εμφανίζεται στη μορφή $\sqrt{g}$ για να είναι εφικτό αυτό. Η σχέση τώρα γίνεται

$$Q = Bg^{1/2} f(H) \Rightarrow \left\{\frac{L^3}{T}\right\} = \{L\}\left\{\frac{L^{1/2}}{T}\right\}\{f(H)\} \Rightarrow f(H) = \{L^{3/2}\}$$

Για να έχει η f(H) διαστάσεις { $L^{3/2}$ }, η συνάρτηση f(H) πρέπει να είναι ίση με $H^{3/2}$.
Έτσι η τελική ομοιογενής σχέση της παροχής όγκου της ροής υπερχείλισης είναι
$Q = CBg^{1/2}H^{3/2}$, όπου C είναι καθαρός αριθμός.

**Πρόβλημα 5**

Ένας κυλινδρικός δακτύλιος, εξωτερικής διαμέτρου $r_o$ και εσωτερικής $r_i$, όπως φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα, βυθίζεται σε ρευστό επιφανειακής τάσης $\sigma$ ή $Y$ και γωνίας επαφής $\theta < 90^o$. Βρείτε τη σχέση που δίνει την ανύψωση του ρευστού στο δακτυλιοειδές διάκενο λόγω τριχοειδούς φαινομένου, εάν το διάκενο αυτό είναι πολύ στενό.




**Λύση**

Από το παραπάνω σχήμα, η ισορροπία δυνάμεων του ρευστού στο δακτυλιοειδές διάκενο δίνει δύναμη λόγω επιφανειακής τάσης=βάρος:

$$Y\cos\theta\left(2\pi r_0 + 2\pi r_{1(\;)}\right) = \rho g\pi\left(r_0^{\,2} - r_i^{\,2}\right)h$$

Όπου μετά από απλοποίηση προκύπτει : $h = 2Y\cos\theta\left(r_0 - r_i\right)$

**Πρόβλημα 6**

Μια σαπουνόφουσκα διαμέτρου $D_1$ ενώνεται με μια άλλη διαμέτρου $D_2$ για να σχηματίσει μια σαπουνόφουσκα διαμέτρου $D_3$ που περιλαμβάνει όλο τον αέρα και των δύο. Υπολογίστε τη διάμετρο $D_3$ συναρτήσει των $D_1$, $D_2$, $p_{atm}$ και της επιφανειακής τάσης $\sigma$, για μια ισόθερμη διαδικασία,.

**Λύση**

Οι μάζες παραμένουν σταθερές για ένα ιδανικό αέριο σε ισοθερμική διαδικασία.

$$m_1 + m_2 = \rho_1\forall_1 + \rho_2\forall_2 = m_3 = \rho_3\forall_3$$

$$\left(\frac{p_a + 4Y/r_1}{RT}\right)\left(\frac{\pi}{6}D_1^{\,3}\right) + \left(\frac{p_a + 4Y/r_2}{RT}\right)\left(\frac{\pi}{6}D_2^{\,3}\right) = \left(\frac{p_a + 4Y/r_3}{RT}\right)\left(\frac{\pi}{6}D_3^{\,3}\right)$$

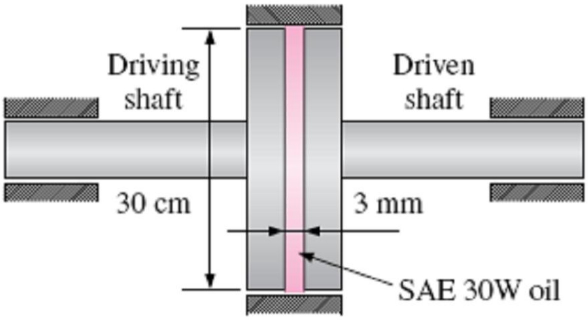
Η θερμοκρασία απαλείφεται και μετά από απλοποίηση προκύπτει:

$$p_a D_3^{\,3} + 8YD_3^{\,2} = \left(p_a D_2^{\,3} + 8YD_2^{\,2}\right) + \left(p_a D_1^{\,3} + 8YD_1^{\,2}\right)$$

Το οποίο είναι ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού το οποίο επιλύεται ως προς $D_3$.

**Πρόβλημα 7**

Το σύστημα συμπλέκτη του παρακάτω Σχήματος χρησιμοποιείται για τη μετάδοση ροπής διαμέσου λεπτού στρώματος λαδιού πάχους $3mm$ και $\mu = 0.38\ N \cdot s/m^2$ που παρεμβάλλεται μεταξύ δύο ίδιων δίσκων. Όταν ο κινητήριος άξονας περιστρέφεται με 1450 rpm, ο κινούμενος άξονας περιστρέφεται με 1398 $rpm$. Θεωρώντας ότι η κατανομή της ταχύτητας στο πάχος του στρώματος λαδιού είναι γραμμική, υπολογίστε τη μεταδιδόμενη ισχύ.

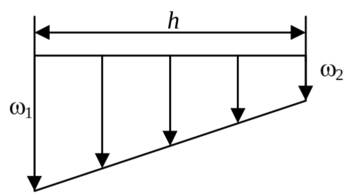



**Λύση**

Το ιξώδες του ρευστού είναι $\mu = 0.38$ N·s/m$^2$.

Οι δίσκοι περιστρέφονται στην ίδια κατεύθυνση με διαφορετικές γωνιακές ταχύτητες $\omega_1$ και $\omega_2$. Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο ένας δίσκος είναι σταθερός και ότι ο άλλος περιστρέφεται με σταθερά γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 - \omega_2$. Η κλίση της ταχύτητας σε κάθε σημείο του πάχους του στρώματος λαδιού είναι $V/h$ όπου $h$ είναι το πάχος του στρώματος λαδιού και $V = (\omega_1 - \omega_2)r$ είναι η περιφερειακή ταχύτητα Τότε η διατμητική τάση στην επιφάνεια του γρηγορότερα περιστρεφομένου δίσκου είναι σε απόσταση r από τον άξονα περιστροφής είναι

$$\tau_w = \mu \frac{du}{dr} = \mu \frac{V}{h} = \mu \frac{(\omega_1 - \omega_2)r}{h}$$




Τότε η διατμητική τάση που δρα σε μια στοιχειώδη επιφάνεια dA στην επιφάνεια του κινητήριου δίσκου και η αντίστοιχη ροπή που δημιουργείται είναι

$$dF = \tau_w dA = \mu \frac{(\omega_1 - \omega_2)r}{h}(2\pi r)dr$$

$$dT = rdF = \mu \frac{(\omega_1 - \omega_2)r^2}{h}(2\pi r)dr = \frac{2\pi\mu(\omega_1 - \omega_2)}{h} r^3 dr$$

Ολοκληρώνοντας:

$$T = \frac{2\pi\mu(\omega_1 - \omega_2)}{h}\int_{r=0}^{D/2} r^3 dr = \frac{2\pi\mu(\omega_1 - \omega_2)}{h}\left.\frac{r^4}{4}\right|_{r=0}^{D/2} = \frac{\pi\mu(\omega_1 - \omega_2)D^4}{32h}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι ω=2πN, η σχετική γωνιακή ταχύτητα είναι:

$$\omega_1 - \omega_2 = 2\pi(N_1 - N_2) = (2\pi\ \text{rad/rev})[(1450 - 1398)\text{rev/min}]\left(\frac{1\,\text{min}}{60\,\text{s}}\right) = 5.445\ \text{rad/s},$$

Αντικαθιστώντας, η μεταδιδόμενη ισχύς είναι:

$$T = \frac{\pi(0.38\ \text{N}\cdot\text{s/m}^2)(5.445\ /\text{s})(0.30\ \text{m})^4}{32(0.003\,\text{m})} = \mathbf{0.55\ N\cdot m}$$

**Σχόλια:** Σημειώνεται ότι η μεταδιδόμενη ροπή είναι ανάλογη της διαμέτρου του δίσκου εις την Τετάρτη δύναμη.

**Πρόβλημα 8**

Υποθέστε ότι η ταχύτητα του ήχου $c$ σε ρευστό εξαρτάται από το μέτρο ελαστικότητας του ρευστού $E$ (μέτρο συμπιεστότητας $\kappa = 1/E$), διαστάσεων $FL^{-2}$, και την πυκνότητα του ρευστού $\rho$ διαμέσου σχέσεως της μορφής $c = (E)^a (\rho)^b$. Εάν αυτή η σχέση είναι διαστατικά ομοιογενής, ποιες είναι οι τιμές των $a$ και $b$;

**Λύση**

Επειδή στο σύστημα FLT, $C = \{LT^{-1}\}$, $\{E_V\} = \{FL^{-2}\}$, και $\rho = \{FL^{-4}T^2\}$

και: $C = (E_V)^a (\rho)^b \rightarrow \left[\dfrac{L}{T}\right] = \left[\dfrac{F^a}{L^{-2a}}\right]\left[\dfrac{F^b T^{2b}}{L^{-4b}}\right]$ (1)

a+b=0 για να ικανοποιεί τις διαστάσεις του F

2b=-1 για να ικανοποιεί τις διαστάσεις του T

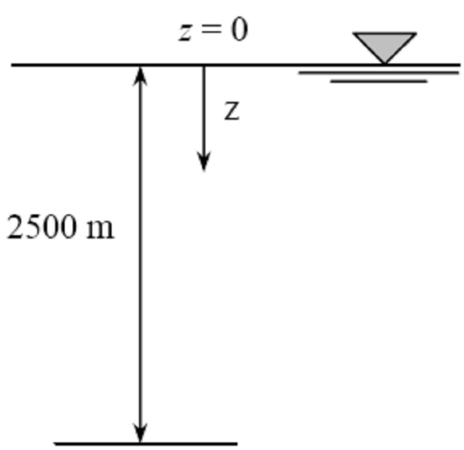
2a+4b=-1 για να ικανοποιεί τις διαστάσεις του L

Έτσι προκύπτει: $a = \dfrac{1}{2}$ and $b = -\dfrac{1}{2}$ και $C = \sqrt{\dfrac{E_V}{\rho}}$

Αυτή η εξίσωση είναι σε συμφωνία με τη γνωστή εξίσωση της ταχύτητας του ήχου.

**Πρόβλημα 9**

Ποια είναι η πυκνότητα και η πίεση σε βάθος 2500 m από την επιφάνεια της θάλασσας, όταν η πυκνότητα στην επιφάνειά της είναι $1030\, kg/m^3$ και το μέτρο ελαστικότητας του θαλασσινού νερού είναι $2.34 \times 10^9\ N/m^2$ . Θεωρήστε ότι η θερμοκρασία, το μέτρο ελαστικότητας και το $g$ είναι αμετάβλητα. Ως γνωστόν $dp = \rho g dz$ .




**Λύση**

Η πυκνότητα του θαλασσινού νερού στην επιφάνεια της θάλασσας όπου η πίεση είναι ατμοσφαιρική είναι $\rho = 1030 \dfrac{kg}{m^3}$ και το μέτρο ελαστικότητας $E = 2.34 \times 10^9 \dfrac{N}{m^2}$

Ως γνωστόν το μέτρο συμπιεστότητας $\kappa = \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T = \dfrac{1}{E} \Rightarrow E = \rho\left(\dfrac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = \rho \dfrac{dp}{d\rho}$

Η υδροστατική διαφορά πίεσης για διαφορική υψομετρική διαφορά dz είναι: dp=ρgdz
Συνδιάζοντας τις δύο σχέσεις δίνει:

$$E = \rho \frac{\rho g dz}{d\rho} = g\rho^2 \frac{dz}{d\rho} \rightarrow \frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{gdz}{E}$$

Ολοκληρώνοντας από z=0 όπου $\rho = \rho_0 = 1030\, kg/m^3$ έως το βάθος z=z όπου ρ=ρ δίνει

$$\int_{\rho_o}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{g}{\mathrm{E}} \int_0^z dz \Rightarrow \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} = \frac{gz}{\mathrm{E}}$$

Λύνοντας ως προς ρ δίνει την μεταβολή της πυκνότητας με το βάθος

$$\rho = \frac{1}{(1/\rho_0) - (gz/\mathrm{E})}$$

Αντικαθιστώντας την πυκνότητα στην σχέση της αλλαγής πίεσης dπ=ρgdz και ολοκληρώνοντας από z=0 όπου p=$p_0$=98kPa έως z=2 όπου p=p δίνει:

$$\int_{\rho_o}^{\rho} dp = \int_o^z \frac{gdz}{\left(\frac{1}{\rho_o}\right) - \left(\frac{gz}{\mathrm{E}}\right)} \Rightarrow p = p_o + \mathrm{E} \ln\left[\frac{1}{1 - \left(\frac{\rho_o gz}{E}\right)}\right]$$

που είναι η επιθυμητή σχέση για τις μεταβολές της πίεσης του θαλασσινού νερού με το βάθος.
Σε βάθος z=2500m, οι τιμές της πυκνότητας και της πίεσης είναι:

$$\rho = \frac{1}{\frac{1}{\left(1030\frac{kg}{m^3}\right)} - \frac{\left(9.81\frac{m}{s^2}\right)(2500m)}{\left(2.34 * 10^9 \frac{N}{m^2}\right)}} = 1041\frac{kg}{m^3}$$

$$\mathrm{P} = (98.000Pa) + \left(2.34 \times 10^9 \frac{N}{m^2}\right) \ln\left[\frac{1}{1 - \frac{\left(1030\frac{kg}{m^3}\right)\left(9.81\frac{m}{s^2}\right)(2500m)}{\left(2.34 \times 10^9 \frac{N}{m^2}\right)}}\right] = 25.50\, MPa$$

**Σχόλια:** Σημειώστε ότι εάν υποθέσουμε ότι ρ=$\rho_0$=1030 $\frac{kg}{m^3}$, η πίεση σε βάθος 2500m θα είναι

ρ=$\rho_0$+ρgz = 0.098 + 25.26 = 25.36MPa
Έτσι η πυκνότητα σε βάθος 2500m είναι:

$$\Delta\rho = \frac{\rho\Delta\rho}{\mathrm{E}} = \left(1030\frac{kg}{m^3}\right)(2340MPa)^{-1}(25.26MPa) = 11.1\frac{kg}{m^3} \text{ και έτσι } \rho = 1041\frac{kg}{m^3}$$