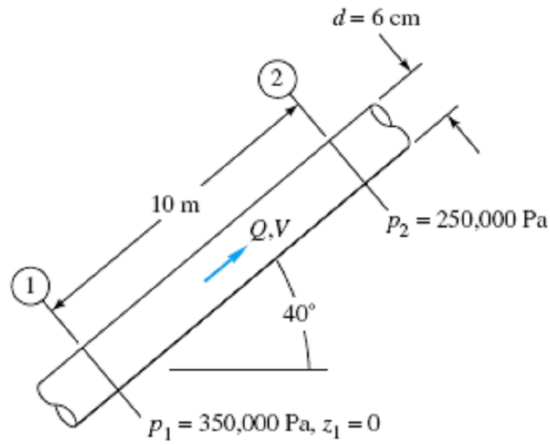
Πρόβλημα 1

Λάδι πυκνότητας $\rho = 900\ kg/m^3$ και κινηματικού ιξώδους $\nu = 0.0002\ m^2/s$ ρέει διαμέσου ενός κεκλιμένου σωλήνα στην κατεύθυνση αυξανομένου υψομέτρου, όπως φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα. Η πίεση και το υψόμετρο είναι γνωστά στα σημεί α 1 και 2 που απέχουν μεταξύ τους 10 m. Θεωρώντας ότι η ροή είναι μόνιμη και στρωτή

a) επιβεβαιώστε τη φορά της ροής
b) υπολογίστε την απώλεια ύψους λόγω τριβής μεταξύ των σημείων 1 και 2, και υπολογίστε
c) την παροχή Q
d) την ταχύτητα ροής V, και
e) τον Re_d. Είναι πραγματικά η ροή στρωτή;



Λύση

$$\mu = \rho\nu = (900\,kg/m^3)(0.0002\ m^2/s) = 0.18\ kg/(m\cdot s)$$

$$z_2 = \Delta L \sin 40^o = (10\,m)(0.643) = 6.43\ m$$

Η φορά της ροής είναι στην κατεύθυνση ελάττωσης του πιεζομετρικού ύψους

$$HGL_1 = \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = 0 + \frac{350000}{900(9.807)} = 39.65\ m$$

$$HGL_2 = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = 6.43 + \frac{250000}{900(9.807)} = 34.75\ m$$

Το HGL είναι μικρότερο στο σημείο 2, έτσι η ροή έχει φορά από το 1 στο 2

Η απώλεια ύψους είναι:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_L \Rightarrow h_L = HGL_1 - HGL_2 = 39.65 - 34.75 = 4.9\ m$$

Το μισό του μήκους του σωλήνα, αρκετά μεγάλη απώλεια ύψους.

$$h_{L,lam} = f\frac{L}{d}\frac{V^2}{2g} = \frac{64}{\mathrm{Re}_d}\frac{l}{d}\frac{V^2}{2g} = \frac{64\mu}{\rho V d}\frac{l}{d}\frac{V^2}{2g} = \frac{32\mu L V}{\rho g d^2} = \frac{128\mu L Q}{\pi\rho g d^4} \Rightarrow$$

$$Q = \frac{\pi\rho g d^4 h_{L,lam}}{128\mu L} = \frac{\pi(900)(9.807)(0.06)^4(4.9)}{128(0.18)(10)} = 0.0076\ m^3/s$$

Η μέση ταχύτητα του ρευστού είναι:

$$V = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{0.0076}{\pi(0.03)^2} = 2.7\ m/s$$

Με την ταχύτητα γνωστή, ο αριθμός Reynolds είναι

$$\mathrm{Re}_d = \frac{Vd}{\nu} = \frac{2.7(0.06)}{0.0002} = 810$$

Ο οποίος είναι αρκετά μικρότερος της τιμής μετάβασης από στρωτή σε τυρβώδη ροή $\mathrm{Re}_d = 2300$, έτσι είναι βέβαιο ότι η ροή είναι στρωτή.

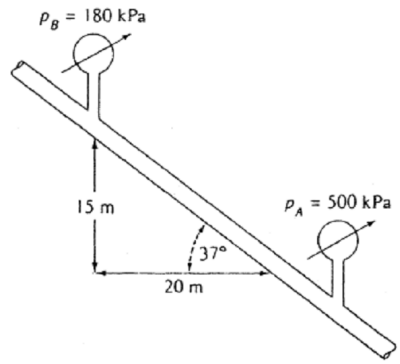
Πρόβλημα 2

Λάδι SAE 30 και θερμοκρασίας $20\ ^oC$ βαθμών ρέει στον παρακάτω σωλήνα διαμέτρου 3 cm. Για τις μετρήσεις πίεσης που φαίνονται στο Σχήμα, προσδιορίστε:

a) τη φορά της ροής στο σωλήνα, και

b) την παροχή σε m^3/h.

Δίδονται: η πυκνότητα του λαδιού $\rho = 891\ kg/m^3$ και το ιξώδες του $\mu = 0.29\ kg/(m \cdot s)$



Λύση

Η φορά της ροής είναι στην κατεύθυνση ελάττωσης του πιεζομετρικού ύψους

$$HGL_B = \frac{p_B}{\gamma} + z_B = 15 + \frac{180000}{891(9.81)} = 35.6\ m$$

$$HGL_A = \frac{p_A}{\gamma} + z_A = 0 + \frac{500000}{891(9.81)} = 57.2\ m$$

Το HGL είναι μικρότερο στο σημείο Β, έτσι η ροή έχει φορά από το Α στο Β

Η απώλεια ύψους είναι:

$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} + z_B + h_L \Rightarrow h_L = HGL_A - HGL_B = 57.2 - 35.6 = 21.6\ m$$

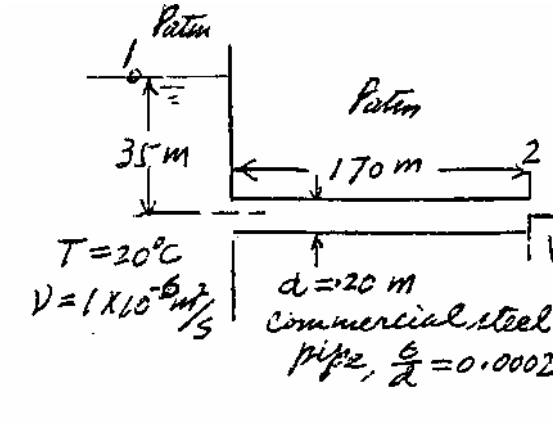
$$h_{L,lam} = f\frac{L}{d}\frac{V^2}{2g} = \frac{64}{\mathrm{Re}_d}\frac{L}{d}\frac{V^2}{2g} = \frac{64\mu}{\rho Vd}\frac{L}{d}\frac{V^2}{2g} = \frac{32\mu LV}{\rho g d^2} = \frac{128\mu LQ}{\pi\rho g d^4} \Rightarrow$$

$$Q = \frac{\pi\rho g d^4 h_{L,lam}}{128\mu L} = \frac{\pi(891)(9.81)(0.03)^4(21.6)}{128(0.29)(25)} = 0.000518\ m^3/s \approx 1.86\ m^3/h$$

$$\mathrm{Re}_d = \frac{Vd}{\nu} = \frac{4\rho Q}{\pi\mu d} = 68$$ Άρα η ροή είναι στρωτή

Πρόβλημα 3

Ένα σύστημα σωληνώσεων μεταφέρει νερό από μια δεξαμενή και εκκρέει κατευθείαν στην ατμόσφαιρα, όπως εμφανίζεται στο παρακάτω Σχήμα. Υπολογίστε το ρυθμό εκροής (παροχή όγκου) του νερού;



Λύση

Επειδή η ταχύτητα του νερού στο σωλήνα είναι άγνωστη, το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας μια επαναληπτική διαδικασία.

Η εξίσωση ενέργειας του συστήματος είναι:

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}+gz_1=\frac{p_2}{\rho}+\frac{V_2^2}{2}+gz_2+h_{L1,2}$$

όπου $h_{L1,2}=f\frac{L}{D}\cdot\frac{V_2^2}{2}$, θεωρώντας τις απώλειες στην είσοδο του σωλήνα αμελητέες.

Επειδή $p_1=p_2=p_{atm}$ και V_1 πολύ μικρή, έχουμε

$$g(z_1-z_2)=\frac{V_2^2}{2}(1+f\frac{L}{D}) \text{ οπότε } V_2=\sqrt{\frac{2g(z_1-z_2)}{(1+f\frac{L}{D})}}$$

Με $\frac{\varepsilon}{D}=0.0002$ και υποθέτοντας $f=0.015$ προκύπτει

$$V_2=\sqrt{\frac{2g(z_1-z_2)}{(1+f\frac{L}{D})}}=\sqrt{\frac{2(9.807\,m/s^2)(35m)}{1+850\cdot f}}=\sqrt{\frac{686}{1+850\cdot f}}=7.06\frac{m}{\sec}$$

Που ανταποκρίνεται σε μια τιμή Reynolds

$$\mathrm{Re}=\frac{V_d}{\nu}=\frac{7.06\cdot 0.2}{10^{-6}}=1.413\cdot 10^6$$

Από το διάγραμμα Moody, ο συντελεστής τριβής για τη συγκεκριμένη τιμή του αριθμού Reynolds $f=0.0147$ και η αναθεωρημένη τιμή V_2 είναι

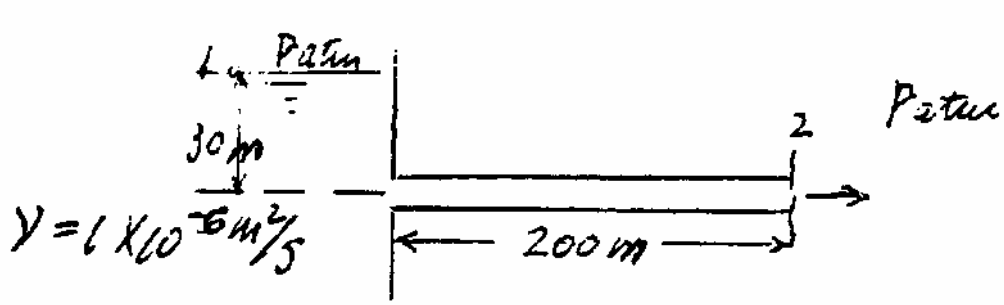
$$V_2=\sqrt{\frac{686}{1+850\,f}}=7.13\frac{m}{\sec}$$

Ο αντίστοιχος αριθμός Reynolds είναι $1.43\cdot 10^6$ απ' τον οποίον προκύπτει συντελεστής τριβής σχεδόν ίδιος με τον προηγούμενο, $f=0.0147$. Έτσι η λύση του προβλήματος είναι:

$$Q=\frac{\pi D^2}{4}V_2=0.224\frac{m^3}{\sec}$$

Πρόβλημα 4

Ένας χαλκοσωλήνας πρέπει να σχεδιαστεί για να μεταφέρει νερό σε μια απόσταση 200m από τη δεξαμενή. Η παροχή του είναι $0.4\frac{m^3}{\sec}$ και η επιτρεπόμενη πτώση πίεσης είναι ίση με 30 m απώλειας ύψους. Ποια είναι η διάμετρος του σωλήνα;



Λύση

Δεν γνωρίζουμε την ταχύτητα του νερού και η λύση θα ληφθεί χρησιμοποιώντας επαναληπτική διαδικασία

Η εξίσωση ενέργειας του συστήματος δίνεται από την εξίσωση:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(z_1 - z_2) = \frac{V_2^2}{2} + f\frac{L}{D}\frac{V_2^2}{2} = \frac{V_2^2}{2}\left(1 + f\frac{L}{D}\right) = \frac{8Q^2}{\pi^2 D^4}\left(1 + f\frac{L}{D}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{D^4}\left(1 + f\frac{L}{D}\right) = \frac{g(z_1 - z_2)\pi^2}{8Q^2}$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα προκύπτει:

$$\frac{1}{D^4}\left(1 + f\frac{L}{D}\right) = \frac{30 \times 9.8 \times \pi^2}{8 \times 0.4^2} = 2266.9$$

Αρχικά θεωρούμε ότι ο συντελεστής f έχει την τιμή 0.015.

Παρατηρούμε ότι ο όρος $f\frac{L}{D}$ είναι πολύ μεγαλύτερος της μονάδας, έτσι μπορούμε να προσεγγίσουμε το αριστερό μέλος της εξίσωσης με

$$f\frac{L}{D^5} = 2266.9 \Rightarrow D = \left(\frac{fL}{2266.9}\right)^{1/5} = \left(\frac{0.015 \times 200}{2266.9}\right)^{1/5} = 0.266$$

Η ταχύτητα

$$V_2 = \frac{0.4}{(\frac{\pi}{4} \times 0.266^2)} = 7.2\ m/\sec \quad \mathrm{Re}_D = \frac{7.2 \times 0.266}{1 \times 10^{-6}} = 1.91 \times 10^6$$

Από το διάγραμμα Moody, $\frac{\varepsilon}{D} = 0.0009$ και $f = 0.0192$

Η διορθωμένη διάμετρος του σωλήνα με παλιά $D = 0.266$ και με επαναληπτική διαδικασία είναι

$$\frac{1}{D^4}\left(1 + f\frac{L}{D}\right) = 2266.9 \Rightarrow D^4 = \frac{1 + f\frac{L}{D}}{2266.9} = \frac{1 + 0.0192\frac{200}{0.266}}{2266.9}$$

$$D = 0.286\ m$$

Η νέα ταχύτητα και ο αριθμός Reynolds είναι:

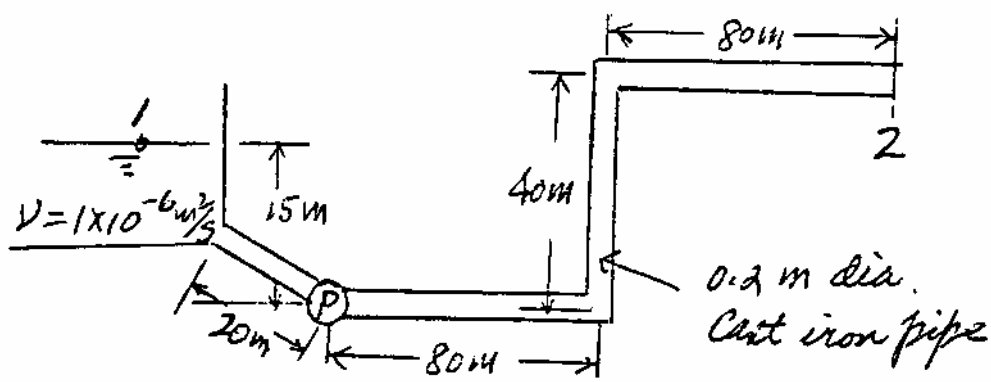
$$V_2 = \frac{0.4}{\frac{\pi}{4}\times 0.286^2} = 6.23\frac{m}{\sec}$$ και

$$\mathrm{Re}_D = \frac{6.23\times 0.286}{10^{-6}} = 1.78\times 10^6$$

Με τη νέα διάμετρο και τον αριθμό Reynolds, βρίσκουμε από το διάγραμμα Moody, με $\frac{\varepsilon}{D} = 0.0008$ ότι $f = 0.0189$, το οποίο είναι πολύ κοντά στο 0.0192 που χρησιμοποιήθηκε προηγουμένως. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η λύση του προβλήματος αυτού έχει επιτευχθεί. Η ζητούμενη διάμετρος του σωλήνα είναι 0.286 m. Άρα απαιτείται μια ελάχιστα μεγαλύτερη τυποποιημένη εμπορική διάμετρος.

Πρόβλημα 5

Μια αντλία έχει τοποθετηθεί σ' ένα σύστημα σωληνώσεων για την παροχή νερού σ' ένα απομακρυσμένο σημείο όπως φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα.
Η ισχύς που απαιτείται προκειμένου να μεταφερθεί το νερό είναι 100 kW. Αγνοώντας τις άλλες απώλειες, αλλά όχι την τριβή του σωλήνα, υπολογίστε την παροχή.



Λύση

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος δίνεται από την εξίσωση:

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{V_2^2}{2} + f_2\frac{L}{D}\frac{V_2^2}{2} + gh_p$$ όπου

$$gh_p = \frac{\dot{W}_{pump}}{\rho_2 A_2 V_2} = -\frac{100}{A_2 V_2}$$ με $A_2 = 0.0314\,m^2$

Η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$V_2\left(V_2^2\left(\frac{1+1100\,f}{2}+245\right)\right) = 3183$$

που μετά από διαδοχικές δοκιμές προκύπτει:

$$V_2 = 5.37\frac{m}{\sec},\ f = 0.021,\ \mathrm{Re}_D = 1.07\cdot 10^6$$

και η παροχή είναι

$$Q = 0.169\,\frac{m^3}{\sec}$$