Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πειραιά
Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών
Τμήμα Μηχανολογίας

Μηχανική Ρευστών
Κεφάλαιο 3
Λυμένα Προβλήματα

Πρόβλημα 1

Ένα αεροπλάνο πετάει στην ατμόσφαιρα με ταχύτητα:

$$\vec{w} = 135\vec{i} + 10\vec{j} - 10\vec{k} \qquad (m/s)$$

Η πυκνότητα, ρ , του ατμοσφαιρικού αέρα δίνεται από την εξίσωση:

$$\rho = \rho_0\left[1 + a(x^2 + y^2) + e^{-bz}\right]$$

$\rho_0 = 1.2Kg/m^3$, $a = 1x10^{-4}$ m^{-2}, και $b = 3x10^{-4}$ m^{-1} . Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της πυκνότητας που διαπιστώνει ο πιλότος αν οι συντεταγμένες του αεροπλάνου είναι x=0, y=0, και z=5000 m.

Λύση

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \,,\ \frac{\partial\rho}{\partial x} = 2\rho_0 ax \,,\ \frac{\partial\rho}{\partial y} = 2\rho_0 ay \,,\ \frac{\partial\rho}{\partial z} = -b\rho_0 e^{-bz}$$

$$w_x = 135\ m/s \,,\ w_y = 10\ m/s \,,\ w_z = -10\ m/s$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + w_x\frac{\partial\rho}{\partial x} + w_y\frac{\partial\rho}{\partial y} + w_z\frac{\partial\rho}{\partial z}$$

$$= 0 + (135\,m/s)(2\rho_0 ax) + (10\,m/s)(2\rho_0 ay) + (135\,m/s)(2\rho_0 ax) + (10m/s)(2\rho_0 be^{-bz})$$

$$\left.\frac{d\rho}{dt}\right|_{x=0,\,y=0,\,z=5000\,m} = 8.03\times10^{-4}\ (kg/m^3)$$

Πρόβλημα 2

Εάν οι τροχιές των υλικών σημείων ενός συνεχούς μέσου δίδονται από τη σχέση

$$x = x_0(1+t) + 3t^2 + 5t^3$$

να βρεθεί η επιτάχυνση κατά Lagrange και Eu1er.

Λύση

Παρατηρούμε ότι τη χρονική στιγμή τα $t = t_0 = 0$ το σωματίδιο ρευστού βρίσκεται στη θέση $x = x_0$. Η ταχύτητα του σωματιδίου αυτού κατά Lagrange είναι $u(x_0,t) = \frac{dx}{dt} = x_0 + 6t + 15t^2$, δηλαδή η ταχύτητα είναι συνάρτηση του χρόνου t και της αρχικής θέσεως x_0, της θέσεώς του τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Η ταχύτητα κατά Eu1er θα πρέπει να είναι συνάρτηση της θέσεως x και του χρόνου t. Δηλαδή $u(x,t)$ εκφράζει την ταχύτητα των σωματιδίων ρευστού που περνούν από τη θέση x συναρτήσει του χρόνου. Άρα $u(x,t) = \frac{dx}{dt} = x_0 + 6t + 15t^2$ (i)

Λύνοντας τη σχέση $x = x_0(1+t) + 3t^2 + 5t^3$ ως προς x_0 προκύπτει $x_0 = \dfrac{x - 3t^2 - 5t^3}{1+t}$

και αντικαθιστώντας στη σχέση (i) παίρνουμε $u(x,t) = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x - 3t^2 - 5t^3}{1+t} + 6t + 15t^2$

Η επιτάχυνση κατά Lagrange είναι $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} = 6 + 30t$ ενώ κατά Eu1er

$$
\begin{aligned}
a_x &= \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} \\
&= \frac{\left(-6t - 15t^2\right)\left(1+t\right) - \left(x - 3t^2 - 5t^3\right)}{\left(1+t\right)^2} + 6 + 30t + \left\{\frac{x - 3t^2 - 5t^3}{1+t} + 6t + 15t^2\right\}\frac{1}{1+t} \\
&= \frac{\left(-6t - 15t^2\right)}{\left(1+t\right)} + 6 + 30t + \frac{6t + 15t^2}{1+t} = 6 + 30t
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι και για τις δύο μεθόδους η επιτάχυνση a_x εξαρτάται μόνο από το χρόνο t.

Πρόβλημα 3

Σ' ένα συνεχές μέσο η ταχύτητα σε κάθε σημείο (x,y,z) του πεδίου ροής και κάθε χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{V} = u\vec{i} + u\vec{j} + w\vec{k} = \frac{x}{1+t}\vec{i} + \frac{2y}{1+t}\vec{j} + \frac{3z}{1+t}\vec{k}$$

Να υπολογιστεί η επιτάχυνση κατά Lagrange και Euler.

Λύση:

Έχουμε

$$u = u(x,y,z,t) = \frac{x}{1+t}\ ,\ v = v(x,y,z,t) = \frac{2y}{1+t} \text{ και } w = w(x,y,z,t) = 3\frac{2x}{1+t}$$

δηλαδή οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι συναρτήσεις θέσεως και χρόνου. Τότε οι συνιστώσες της επιτάχυνσης κατά Euler θα είναι:

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-x}{(1+t)^2} + \frac{x}{1+t}\cdot\frac{1}{1+t} = 0\ ,$$

$$a_y = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{-2y}{(1+t)^2} + \frac{2y}{1+t}\cdot\frac{2}{1+t} = \frac{2y}{(1+t)^2}\ ,$$

$$a_z = \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{-3z}{(1+t)^2} + \frac{3z}{1+t}\cdot\frac{3}{1+t} = \frac{6z}{(1+t)^2}$$

αντιστοίχως

Οι συνιστώσες κατά Lagrange υπολογίζονται αφού προηγουμένως έχει υπολογιστεί η ταχύτητα κατά Lagrange:

$$u = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{x}{1+t} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dt}{1+t} \Rightarrow \ln x = \ln(1+t) + \ln C_1 \Rightarrow x = C_1(1+t)$$

Ομοίως:

$$v = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{2y}{1+t} = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{2y} = \frac{dt}{1+t} \Rightarrow \ln y^{\frac{1}{2}} = \ln(1+t) + \ln C_2 \Rightarrow y = C_3(1+t)^2 \qquad \text{όπου}$$

$C_3 = {C_2}^2$ και τέλος

$z = C_4(1+t)^3$

Τη χρονική στιγμή t=0 οι παραπάνω σχέσεις δίνουν:

$x = x_0 = C_1$, $y = y_0 = C_2$ και $z = z_0 = C_4$

Άρα:

$x = x_0(1+t)$, $y = y_0(1+t)^2$, $z = z_0(1+t)^3$

Οπότε η ταχύτητα κατά Lagrange είναι:

$u(x_0,t) = \dfrac{dx}{dt} = x_0$, $v(y_0,t) = 2y_0(1+t)$ και $w(z_0,t) = 3z_0(1+t)^2$

ενώ η επιτάχυνση είναι: $a_x = \dfrac{d^2x}{dt} = 0$, $a_y = 2y_0$ και $a_z = 6z_0(1+t)$

Παρατηρούμε ότι αν στις τελευταίες εκφράσεις αυτές α ντικαταστήσουμε το y_0, z_0 από τις παραπάνω σχέσεις θα προκύψουν οι επιταχύνσεις κατά Euler.

Πρόβλημα 4

Οι συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας $\vec{V}$ σ' ένα πεδίο ροής δίνονται από τις σχέσεις

$u = K_1 x e^{-K_3 t}$, $v = K_2 y$ και $w = 0$ για $t \geq 0$

(i) Να βρεθεί η εξίσωση των ροϊκών γραμμών όταν $K_1 = K_2 = K_3 = 1\,(\sec^{-1})$

(ii) Ποια είναι η τροχιά του σωματιδίου ρευστού που τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση (x_0, y_0)

(iii) Να βρεθεί η εξίσωση της ινώδους φλέβας, της νοητής εκείνης γραμμής στην οποία βρίσκονται όλα τα σωματίδια ρευστού που πέρασαν, πριν από μια δεδομένη χρονική στιγμή, από το σημείο $\vec{r} = a\vec{i} + b\vec{j}$

Λύση

(i) Επειδή $w = 0$ η κίνηση του ρευστού είναι δισδιάστατη και η διαφορική εξίσωση των ροϊκών γραμμών γράφεται

$\dfrac{dx}{u} = \dfrac{dy}{V}$ ή $\dfrac{dx}{xe^{-t}} = \dfrac{dy}{y}$ όπου η ολοκλήρωση γίνεται θεωρώντας ότι $t =$ σταθ., οπότε

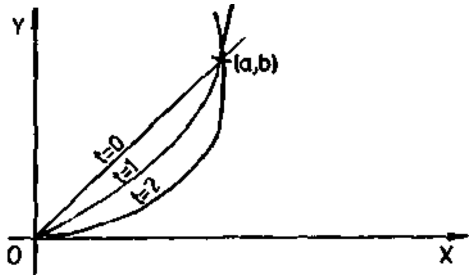
$\dfrac{dx}{x}e^t = \dfrac{dy}{y} \Rightarrow e^t \ln x = \ln y + \ln C_1 \Rightarrow x^{e^t} = C_1 y$ ή τέλος $y = Cx^{e^t}$ με ($C = C_1^{-1}$)

Η εξίσωση $y = Cx^{e^t}$ είναι η εξίσωση της οικογένειας των ροϊκών γραμμών που αντιστοιχεί στο δοθέν πεδίο ταχυτήτων. Παρατηρούμε ότι οι καμπύλες αυτές για οποιαδήποτε χρονική στιγμή διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Για τον προσδιορισμό της σταθεράς C θα πρέπει να γνωρίζουμε ένα σημείο από το οποίο να διέρχονται οι ροϊκές γραμμές π.χ. αν αυτές διέρχονται από το σημείο (a,b) θα έχουμε

$b = Ca^{e^t}$ οπότε $C = \dfrac{b}{a^{e^t}}$ και η $y = Cx^{e^t}$ γράφεται:

$y = \dfrac{b}{a^{e^t}} x^{e^t}$ ή $y = b(\dfrac{x}{a})^{e^t}$

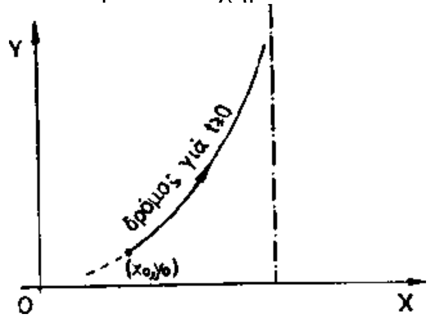
Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζονται τρεις ροϊκές γραμμές που διέρχονται από το σημείο (a,b) τρεις διαφορετικές χρονικές στιγμές.



(ii) Για την εύρεση της εξίσωσης της τροχιάς ενός σωματιδίου ρευστού που βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t=0$ στη θέση (x_0, y_0) εκφράζουμε τις συντεταγμένες του σημείου x, y μια τυχαία χρονική στιγμή t συναρτήσει του χρόνου t αλλά και της αρχικής του θέσης (x_0, y_0), δηλαδή $x = x(x_0, t)$ και $y = y(y_0, t)$ και απαλείφουμε μεταξύ τους το χρόνο t. Πράγματι

$$\frac{dx}{dt} = u = xe^{-t} \Rightarrow \frac{dx}{x} = e^{-t}dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x} = \int_0^t e^{-t}dt \quad \frac{dy}{dt} = v = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dt \Rightarrow \int_{y_0}^{y}\frac{dy}{y} = \int_0^t dt$$

απ' όπου προκύπτει $x = x_0 e^{1-e^{-t}}$ και $y = y_0 e^{t}$ και η απαλοιφή του χρόνου μεταξύ αυτών δίνει $y = \dfrac{y_0}{1-\ln(\dfrac{x}{x_0})}$ που εκφράζει την εξίσωση της τροχιάς (δρόμου) του σωματιδίου ρευστού στο παρακάτω Σχήμα.



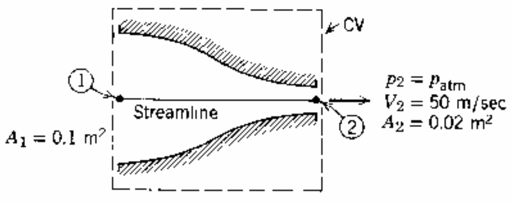
(iii) Όπως ορίσαμε και στη θεωρία η εξίσωση της ινώδους φλέβας εκφράζει τη νοητή εκείνη γραμμή στην οποία βρίσκονται όλα τα σωματίδια ρευστού που πέρασαν, πριν από μια δεδομένη χρονική στιγμή, από το ίδιο σημείο (a,b) του πεδίου ροής.
Οι παραμετρικές εξισώσεις της τροχιάς ενός σωματιδίου ρευστού είναι:
$x = x_0 e^{1-e^{-t}}$ και $y = y_0 e^{t}$
Οι εξισώσεις αυτές δίνουν :
$x_0 = \dfrac{x}{e^{1-e^{-t}}}$ και $y_0 = \dfrac{y}{e^{t}}$
Τα σωματίδια ρευστού που πέρασαν από το σημείο $\vec{r} = a\vec{i} + b\vec{j}$ μια χρονική στιγμή τ με $0 \le \tau \le t$ έχουν συντεταγμένες $\left(x_0 = \dfrac{a}{e^{1-e^{-\tau}}}, y_0 = \dfrac{b}{e^{\tau}} \right)$ τη χρονική στιγμή $t=0$.
Αυτές είναι και οι παραμετρικές εξισώσεις της διανυσματικής εξίσωσης $\vec{r}_0 = \vec{r}_0((a,b),\tau)$ (Δηλαδή τα σωματίδια ρευστού που περνούν από το σημείο του πεδίου ροής (a,b))
Για να βρούμε τώρα την εξίσωση της τροχιάς κάθε σωματιδίου που πέρασε από το σημείο (a,b) του πεδίου ροής, αντικαθιστούμε τα (x_0, y_0) στις παραμετρικές εξισώσεις της τροχιάς ενός σωματιδίου όπου προκύπτει:

$x = \frac{a}{e^{1-e^{-\tau}}} e^{1-e^{-t}}$ και $y = \frac{b}{e^{\tau}} e^{t}$

Η λύση αυτή είναι της μορφής $\vec{r} = \vec{r}\left(\vec{r}_0((a,b),\tau),t\right)$ και προκειμένου να βρεθούν οι θέσεις των σωματιδίων ρευστού (x,y) τη χρονική στιγμή t που πέρασαν το χρονικό διάστημα $(0,t)$ από το σημείο (a,b), $\tau \in (0,t)$, απαλείφουμε από τις παραπάνω εξισώσεις το e^t οπότε προκύπτει η εξίσωση της ινώδους φλέβας. $\ln\frac{x}{a} = e^{-\tau}(1-\frac{b}{y})$

Πρόβλημα 5

Αέρας ρέει σε σταθεροποιημένη κατάσταση και χαμηλή ταχύτητα διαμέσου ενός οριζόντιου ακροφυσίου και εκρέει στην ατμόσφαιρα. Η διατομή στην είσοδο του ακροφυσίου είναι 0.1 m^2 και αυτή στην έξοδο 0.02 m^2. Η ροή είναι ουσιαστικά ασυμπίεστη και ατριβή. Υπολογίστε τη μανομετρική πίεση που απαιτείται στην είσοδο του ακροφυσίου έτσι ώστε η ταχύτητα στην έξοδό του να είναι 50 m/sec.



Λύση

Δίδεται: η ροή διάμεσου ενός ακροφυσίου όπως δίνεται στο παραπάνω Σχήμα. Η ροή είναι μόνιμη, ασυμπίεστη και ατριβή.

Βρείτε: $p_1 - p_{atm}$

Βασικές εξισώσεις: $\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho d\forall + \frac{\partial}{\partial t}\int_{CS} \rho d\vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Υποθέσεις:

1) Μόνιμη Ροή
2) Ασυμπίεστη ροή
3) Ατριβή ροή
4) Ροή κατά μήκος ροϊκής γραμμής
5) $z_1 = z_2$
6) Ομοιόμορφη ροή στις διατομές 1 και 2

Στην έξοδο του ακροφυσίου, ο αριθμός Mach είναι $M_2 = \frac{V_2}{c} = \frac{50\frac{m}{\sec}}{340\frac{m}{\sec}} = 0.147$

μικρότερος του 0.3, έτσι η ροή μπορεί να θεωρηθεί ασυμπίεστη.

Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli κατά μήκος μιας ροϊκής γραμμής μεταξύ των σημείων 1 και 2 για να υπολογίσουμε την πίεση p_1

Τότε

$$p_1 - p_{atm} = p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}\cdot(V_2^2 - V_1^2)$$

Εφαρμόζουμε την εξίσωση της συνέχειας για τον υπολογισμό του V_1

$$0 = \{-|\rho V_1 A_1|\} + \{|\rho V_2 A_2|\} \text{ ή } V_1 A_1 = V_2 A_2$$

Κατά συνέπεια

$$V_1 = V_2 \frac{A_2}{A_1} = 50 \frac{m}{\sec} \frac{0.02\ m^2}{0.1\ m^2} = 10 \frac{m}{\sec}$$

Για τον αέρα σε τυπικές συνθήκες έχουμε:

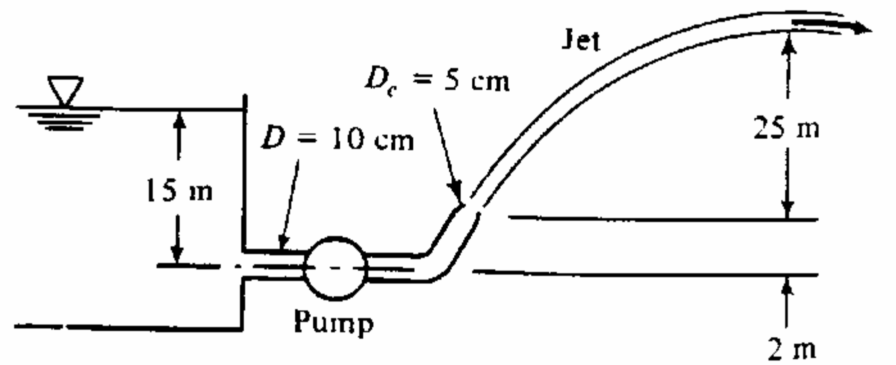
$$p_1 - p_{atm} = \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2) = \frac{1}{2} \times 1.23 \frac{kg}{m^3}\left[50^2 \frac{m^2}{\sec^2} - 10^2 \frac{m^2}{\sec^2}\right]\frac{N \cdot \sec^2}{kg \cdot m}$$

$$p_1 - p_{atm} = 1.48\, kPa$$

Το πρόβλημα αυτό περιγράφει μια τυπική εφαρμογή της εξίσωσης του Bernoulli. Σημειώνεται ότι εάν οι ροϊκές γραμμές είναι ευθείες γραμμές στην είσοδο και την έξοδο του ακροφυσίου , η πίεση τότε θα είναι ομοιόμορφη στις διατομές αυτές.

Πρόβλημα 6

Η αντλία του παρακάτω σχήματος παίρνει νερό από μια δεξαμενή και το εκτοξεύει διαμέσου ενός ακροφυσίου διαμέτρου 5 cm σ' ένα μέγιστο ύψος 25 m πάνω από την έξοδο του ακροφυσίου. Οι απώλειες λόγω τριβών στους σωλήνες είναι 6.5m. Ποια είναι η παρεχόμενη ισχύς από την αντλία στο νερό;



Λύση

Για μέγιστο υψόμετρο της δέσμης νερού, πρέπει η δέσμη στην έξοδο του ακροφυσίου να σχηματίζει γωνία $\theta = 45^o$ με την οριζόντια διεύθυνση και να έχει ταχύτητα:

$$V_2 \sin\theta = \sqrt{2g\Delta z_{\max}} \Rightarrow V_2 = \frac{[2(9.81)25]^{1/2}}{\sin 45^o} \approx 31.32 \frac{m}{\sec}$$

Η σταθεροποιημένη μορφή της εξίσωσης ενέργειας για το σύστημα σωληνώσεων δίνει:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + h_f - h_p \Rightarrow 0 + 0 + 15 = 0 + \frac{(31.32)^2}{2(9.81)} + 2 + 6.5 - h_p$$

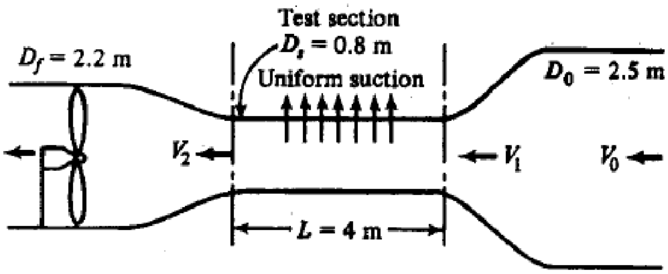
$$\Rightarrow h_p = 43.5\, m$$

Οπότε:

$$P_{pump} = \rho g Q h_p = (9790)\left[\frac{\pi}{4}(0.05)^2(31.32)\right](43.5) = 26200\ W$$

Πρόβλημα 7

Σε μερικές αεροσήραγγες, όπως αυτή του παρακάτω σχήματος, το τοίχωμα του τμήματος δοκιμών είναι από πορώδες υλικό, διαμέσου του οποίου το ρευστό αναρροφάται έτσι ώστε το οριακό στρώμα στο τοίχωμα να είναι λεπτό. Το τοίχωμα του τμήματος δοκιμών έχει μήκος 4 m και περιέχει 800 οπές διαμέτρου 6mm ανά τετραγωνικό μέτρο επιφάνειας. Η ταχύτητα αναρρόφησης του ρευστού σε κάθε οπή είναι $V_z = 10$ m/s, και η ταχύτητα του ρευστού στην είσοδο του τμήματος δοκιμών $V_1 = 45$ m/s. Εάν η ροή αέρα είναι ασυμπίεστη σε 20°C και 1 atm, υπολογίστε:
(a) V_0, (b) τον συνολικό ρυθμό όγκου αναρρόφησης της ροής, (c) V_2, και (d) V_f.



Λύση:

$$A_{\tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma\ \delta o\kappa\iota\mu\acute{\omega}\nu} = \pi D_s L = \pi (0.8\,m)(4\,m) = 10.05\,m^2$$

$$N_{o\pi\acute{\epsilon}\varsigma} = 10.05\,(m^2) \times 800 \left(\frac{o\pi\acute{\epsilon}\varsigma}{m^2}\right) = 8042\ \text{οπές}$$

Ασυμπίεστη Ροή:

$$V_1 \frac{\pi}{4} D_1^2 = V_0 \frac{\pi}{4} D_0^2 \Longrightarrow V_0 = V_1 \left(\frac{D_1}{D_0}\right)^2 = 45\,(m/s)\left(\frac{0.8}{2.5}\right)^2 = 4.61\,m/s$$

$$\dot{V}_{\alpha\nu\alpha\rho\rho\acute{o}\varphi} = N_{o\pi}\dot{V}_{o\pi\acute{\eta}\varsigma} = 8042\,\frac{\pi}{4}(0.006\,m)^2\,(10\,m/s) = 2.27\,m^3/s$$

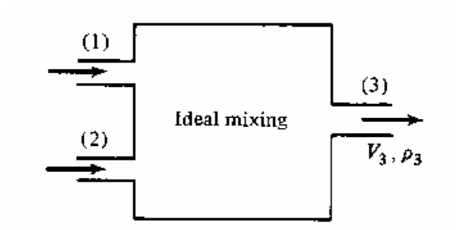
$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 - \dot{V}_{\alpha\nu\alpha\rho\rho\acute{o}\varphi.} = \frac{\pi}{4} D_1^2 V_1 - 2.27\,m^3/s$$
$$= \frac{\pi}{4}(0.8\,m)^2(45\,m/s) - 2.27\,m^3/s = 20.35\,m^3/s$$

Τότε $$V_2 = \frac{20.35\,(m^3/s)}{\frac{\pi}{4}(0.8\,m)^2} = 40.5\,m/s$$

Επίσης: $$V_f = \frac{20.35\,m^3/s}{\frac{\pi}{4}(2.2\,m)^2} = 5.35\,m/s$$

Πρόβλημα 8

Στην παρακάτω εικόνα οι σωλήνες 1 και 2 έχουν διάμετρο 2 cm και ο 3 $D_3 = 3$ cm. Οινόπνευμα (SG = 0. 79) εισέρχεται διαμέσου τ ου σωλήνα 1 με 8 m/s, ενώ νερό εισέρχεται διαμέσου του σωλήνα 2 με 12 m/s. Εάν υποθέσουμε ότι έχουμε ιδανική ανάμειξη ασυμπίεστων ρευστών, υπολογίστε την ταχύτητα και την πυκνότητα του μείγματος στην έξοδο, διατομή 3.



Λύση:

$\rho_1 = (SG)\rho = 0.79\,(998) = 788 \; kg/m^3$

$V_1 = 8 \; m/s \,, \quad V_2 = 12 \; m/s$

$D_1 = D_2 = 0.02 \; m \,, \quad D_3 = 0.03 \; m$

$\dot{\forall}_1 = V_1 A_1 = 8\,(m/s)\,\frac{\pi}{4}\,(0.02\,m)^2 = 0.00251 \; m^3/s$

$\dot{\forall}_2 = V_2 A_2 = 12\,(m/s)\,\frac{\pi}{4}\,(0.02\,m)^2 = 0.00377 \; m^3/s$

Ασυμπίεστη Ροή: $\dot{\forall}_3 = \dot{\forall}_1 + \dot{\forall}_2 = 0.00628 \; \frac{m^3}{s} = V_3 \frac{\pi}{4}(0.03)^2$

$\Rightarrow \boxed{V_3 = 8.89 \; m/s}$

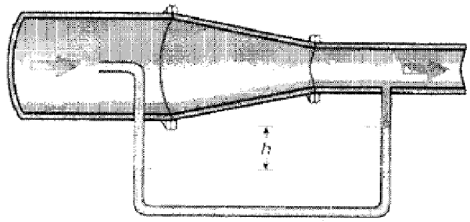
Ισοζύγιο μάζας:

$\dot{m}_1 + \dot{m}_2 = (0.79)\,(998\; kg/m^3)\,(0.00251\; m^3/s) + (998\; \frac{kg}{m^3})(0.00377\; m^3/s)$

$= 5.74\; \frac{kg}{s} = \rho_3 \dot{\forall}_3 \;\Rightarrow\; \boxed{\rho_3 = 914 \; kg/m^3}$

Πρόβλημα 9

Αέρας (πυκνότητας 1,2 kg/m^3) διέρχεται από τη συστολή του παρακάτω Σχήματος με σταθερή ογκομετρική παροχή 6 m^3/min. Οι διάμετροι των αγωγών πριν και μετά τη συστολή είναι 10 και 5 cm, αντίστοιχα. Το υγρό του μανομέτρου είναι λάδι πυκνότητας 800 kg/m^3. Να ευρεθεί η ένδειξη *h* του διαφορικού μανομέτρου.



Λύση:

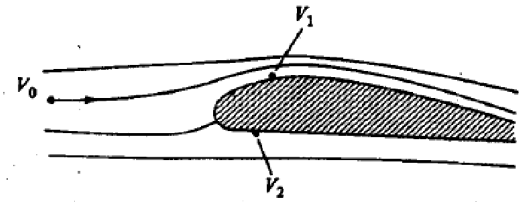
$$V_2 = \frac{\dot{\forall}}{\left(\frac{\pi D_2^2}{4}\right)} = \frac{4x(6m^3/\min)/(60s/\min)}{\pi x(0.05m)^2} = 50.93m/s$$

$$p_{10} = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 \Rightarrow p_{10} - p_2 = \frac{1}{2}\rho_a V_2^2 = \rho_o gh \Rightarrow h = \frac{1}{2g}\left(\frac{\rho_a}{\rho_o}\right)V_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2x9.807m/s^2}\left(\frac{1.2kg/m^3}{800kg/m^3}\right)(50.93m/s)^2 = 0.1983m$$

Πρόβλημα 10

Η θεωρία ιδανικού ρευστού δημιουργεί ένα πεδίο ροής γύρω από μία πτέρυγα όμοιο με αυτό του παρακάτω Σχήματος. Εάν η ταχύτητα προσέγγισης του αέρα είναι Vo=50 m/s, ποια είναι η διαφορά πίεσης μεταξύ της επάνω και κάτω πλευράς της πτέρυγας στα σημεία όπου οι ταχύτητες ροής είναι V_1 = 95 m/s and V_2 = 75m/s; Υποθέστε ότι η πυκνότητα του αέρα είναι σταθερά και ίση με 1.1 kg/m^3.



Λύση:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 \Rightarrow p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho(V_1^2 - V_2^2) = \frac{1}{2}\rho V_1^2\left[1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}x1.1(kg/m^3)x(75m/s)^2 x\left[1 - \left(\frac{75m/s}{95m/s}\right)^2\right] = 1165.5Pa$$

Πρόβλημα 11

Ένα μανόμετρο υδραργύρου-κεροζίνης συνδέεται με ένα σωλήνα Pitot-static όπως φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα. Εάν η μετατόπιση y είναι 0.18 m, ποια είναι η ταχύτητα της κεροζίνης στον σωλήνα; Θεωρούμε ότι η ειδική βαρύτητα της κεροζίνης είναι 0.81 και του υδραργύρου 13.6.

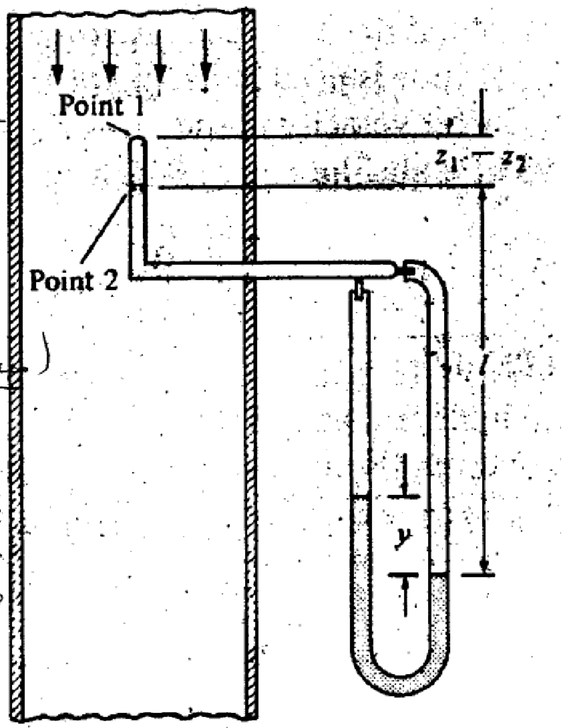
$$P_1 + \gamma_{\kappa\varepsilon\rho o}(z_1 - z_2) + l\gamma_{\kappa\varepsilon\rho o} - \gamma_{Hg}\, y - (l - y)\gamma_{\kappa\varepsilon\rho o} = P_2$$

$$\Rightarrow P_1 - P_2 = y(\gamma_{Hg} - \gamma_{\kappa\varepsilon\rho o}) - (z_1 - z_2)\gamma_{\kappa\varepsilon\rho o}$$

$$\Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\gamma_{\kappa\varepsilon\rho o}} + z_1 - z_2 = \frac{y(\gamma_{Hg} - \gamma_{\kappa\varepsilon\rho o})}{\gamma_{\kappa\varepsilon\rho o}}$$

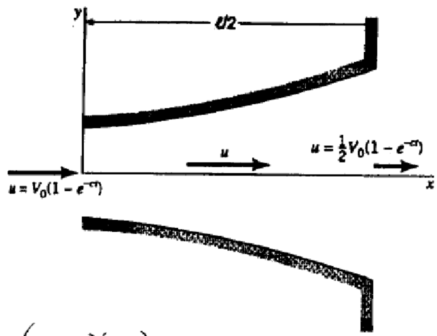
$$\Rightarrow \left(\frac{P_1}{\gamma_{\kappa\varepsilon\rho}} + z_1\right) - \left(\frac{P_2}{\gamma_{\kappa\varepsilon\rho}} + z_2\right) = \frac{V^2}{2g} = y\left(\frac{SG_{Hg}}{SG_{\kappa\varepsilon\rho}} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{V = \sqrt{2gy\left(\frac{SG_{Hg}}{SG_{\kappa\varepsilon\rho}} - 1\right)}} = 7,467\ m/s$$



Πρόβλημα 12

Καθώς η βάνα ανοίγει, νερό ρέει διαμέσου του διαχύτη του παρακάτω Σχήματος με συνεχώς αυξανόμενη παροχή έτσι ώστε η ταχύτητα κατά μήκος του άξονα του διαχύτη να είναι $\vec{V} = V_0(1-e^{-ct})(1-\frac{x}{l})\vec{i}$, όπου τα V_0, c και l σταθερές. Υπολογίστε την επιτάχυνση του ρευστού ως συνάρτηση των x και t.



$$u_x = V_0\left(1-e^{-ct}\right)\left(1-\frac{x}{\ell}\right)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{V_0}{\ell}\left(1-e^{-ct}\right)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = c\,V_0\,e^{-ct}\left(1-\frac{x}{\ell}\right)$$

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + \cancel{v_y}^{\,0}\frac{\partial u_x}{\partial y} + \cancel{v_z}^{\,0}\frac{\partial u_x}{\partial z}$$

$$= cV_0\left(1-\frac{x}{\ell}\right)e^{-ct} + \frac{V_0^2}{\ell}\left(1-e^{-ct}\right)^2\left(1-\frac{x}{\ell}\right)$$

Πρόβλημα 13

Μια αεροτομή κινείται στον αέρα με ταχύτητα 255 km/h σε υψόμετρο 2000m και σε πρότυπη ατμόσφαιρα. Η πίεση στο επίπεδο της θάλασσας είναι 101325 Pa, η θερμοκρασία 288 K και η ανά μονάδα ύψους μεταβολή της θερμοκρασίας 0.0065 K/m. Σε ένα σημείο στην επάνω πλευρά της αεροτομής η σχετική τοπική ταχύτητα είναι 320 km/h και σε ένα σημείο στην κάτω πλευρά της αεροτομής είναι 220 km/h, όπως φαίνονται στο παρακάτω Σχήμα.

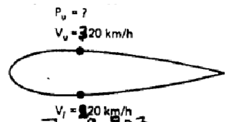
a) Υπολογίστε την πίεση, θερμοκρασία, πυκνότητα και ιξώδες του αέρα στο υψόμετρο πτήσης.

b) Εάν η ταχύτητα του ήχου στον αέρα δίδεται από την ακόλουθη σχέση $a = \sqrt{1.4R^{*}T}$ μπορεί να θεωρηθεί η ροή του αέρα στο υψόμετρο πτήσης ασυμπίεστη;

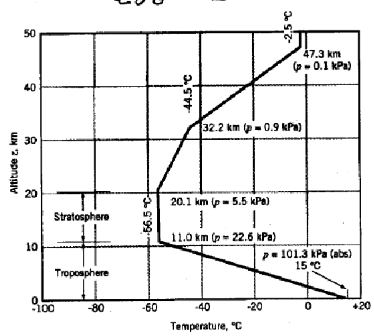
c) Υπολογίστε τις πιέσεις στα παραπάνω σημεία στην επιφάνεια της αεροτομής.

Η ατμοσφαιρική πίεση σε υψόμετρο 2000 m είναι:

$$P = P_0\left[1-\frac{a(z-z_0)}{T_0}\right]^{\frac{g}{aR^*}}$$



$$= 101325\,(Pa)\left[1-\frac{0.0065\times 2000}{288}\right]^{\frac{9.807}{0.0065\cdot 287}} = 101325\times 0.7844 = 79480\ Pa$$



■ **FIGURE 2.6** Variation of temperature with altitude in the U.S. standard atmosphere.

$$T = T_0 - a z = 288 - 0.0065\times 2000 = 275\ K$$

$$\rho = \frac{p}{R^* T} = \frac{79480\ Pa}{287\,(J/kg\,K)\ 275\ K} = 1.007\ kg/m^3$$

$$\mu = \mu_0\left(\frac{c+T_0}{c+T}\right)\left(\frac{T}{T_0}\right)^{1.5} =$$

$$= 17.17\times 10^{-6}(Pa\cdot s)\left(\frac{110+288}{110+275}\right)\left(\frac{275}{288}\right)^{1.5}$$

$$= 16.56\times 10^{-6}(Pa\cdot s)$$

b) $a = \sqrt{1.4\,R^* T} = \sqrt{1.4\times 287\,(J/kg\,K)\ 275\ K} = 332.4\ m/s$

$$V_\infty = 255\ km/h = \frac{255000\ m}{3600\ s} = 70.83\ m/s$$

$$V_u = 320\ km/h = 88.89\ m/s$$

$$V_l = 220\ km/h = 61.11\ m/s$$

Το χειρότερο σημείο για φαινόμενα συμπιεστότητας είναι:

$$M_u = \frac{V_u}{a} = \frac{88.89}{332.4} = 0.267 < 0.3$$

Άρα τα φαινόμενα συμπιεστότητας μπορούν να θεωρηθούν αμελητέα $\Longrightarrow$ ροή ασυμπίεστη

c) Bernoulli:

$$p_u = p_\infty + \frac{\rho}{2}\left(V_\infty^2 - V_u^2\right) = 79480 + \frac{1.007}{2}\left[70.83^2 - 88.89^2\right] = 78027.6\ Pa$$

$$p_l = p_\infty + \frac{\rho}{2}\left(V_\infty^2 - V_l^2\right) = 79480 + \frac{1.007}{2}\left[70.83^2 - 61.11^2\right] = 80125.7$$