Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πειραιά
Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών
Τμήμα Μηχανολογίας

Μηχανική Ρευστών
Κεφάλαιο 2
Λυμένα Προβλήματα

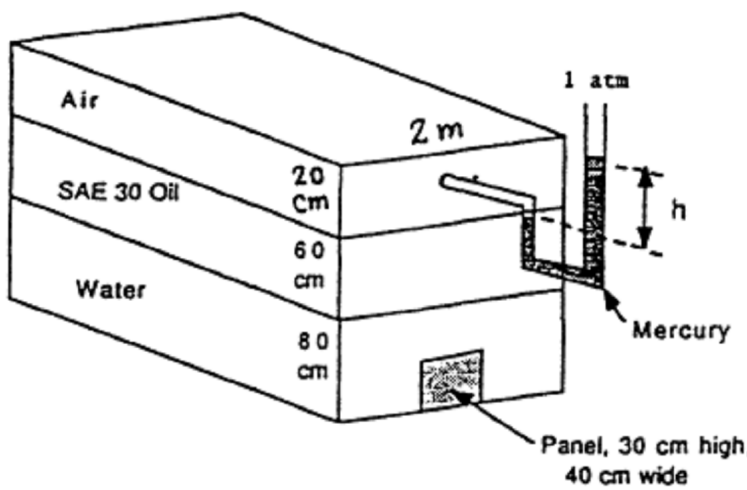
Πρόβλημα 1

Για το κλειστό δοχείο του παρακάτω σχήματος, όλα τα ρευστά είναι στους 20 ^oC, και ο χώρος του αέρα είναι υπό πίεση. Έχει υπολογιστεί ότι η συνολική προς τα έξω υδροστατική δύναμη, στην επίπεδη επιφάνεια διαστάσεων 30 x40 cm^2 είναι 8450 N. Υπολογίστε:

α) την πίεση στον χώρο του αέρα, και

β) το ύψος της ένδειξης h στο υδραργυρικό μανόμετρο.

Δίδεται η πυκνότητα του λαδιού $\rho = 891\ kg/m^3$



Λύση

Από τη δοθείσα δύναμη που ασκείται στην επίπεδη επιφάνεια προκύπτει η μανομετρική πίεση που ασκείται στο κέντρο βάρους της, ως εξής:

$$F = 8450\,N = p_C A = p_C\left(0.3\times 0.4\,m^2\right) \Rightarrow p_C = 70417\,Pa\ \ (gage)$$

Αυτή είναι η πίεση του νερού 15 cm από τον πυθμένα του δοχείου. Έτσι τώρα μπορεί να βρεθεί η πίεση του αέρα ως εξής:

$$p_{\alpha\acute{\varepsilon}\rho\alpha} = 70417\,Pa - \gamma_{\nu\varepsilon\rho o\acute{u}} h_{\nu\varepsilon\rho o\acute{u}} - \gamma_{\lambda\alpha\delta\iota o\acute{u}} h_{\lambda\alpha\delta\iota o\acute{u}} = 70417\,Pa - (9790)(0.80-0.15) - (8720)(0.60)$$
$$= 58800\,Pa$$

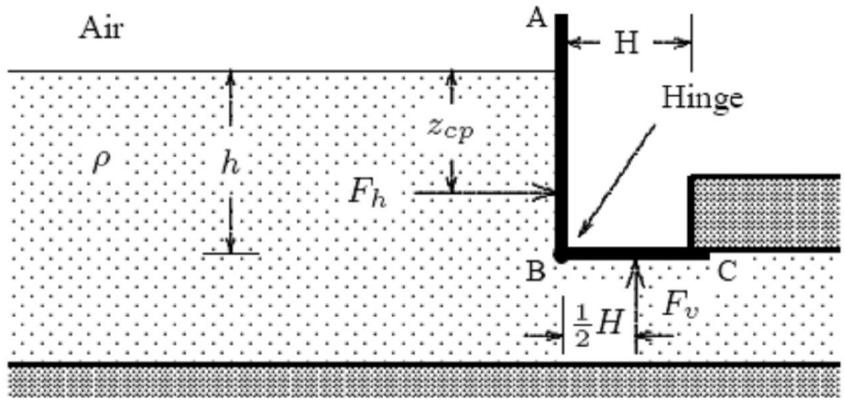
Αμελώντας το ειδικό βάρος του αέρα έχουμε:

$$58800\,Pa - \gamma_{Hg} h_{Hg} = 58800\,Pa\ - (133100\ N/m^3) h_{Hg} = p_{atm} = 0\ (gage) \Rightarrow h_{Hg} = 0.44\,m$$

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε την παρακάτω θύρα φράγματος σχήματος L, ABC, όπως φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα. Η θύρα έχει πλάτος Η στη διεύθυνση κάθετη στο χαρτί και περιστρέφεται γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το σημείο Β. Το βάρος της

θύρας μπορεί να θεωρηθεί αμελητέο. Να βρεθεί για ποιο βάθος του ρευστού h η θύρα θα ανοίξει αυτόματα.



Λύση

Για το ορθογώνιο κατακόρυφο τμήμα της θύρας, το κέντρο βάρους, το εμβαδόν και η ροπή αδράνειας δίδονται από τις σχέσεις:

$$z_C = \frac{1}{2}h\,,\quad A = hH\,,\quad I_{yy} = \frac{1}{12}Hh^3$$

Έτσι, η οριζόντια δύναμη F_h που ασκείται στο κατακόρυφο τμήμα της θύρας, είναι:

$$F_h = \rho g z_C A = \rho g\left(\frac{1}{2}h\right)(hH) = \frac{1}{2}\rho g h^2 H$$

Επειδή η θύρα στο κάτω μέρος της είναι οριζόντια, η πίεση εκεί είναι σταθερή και δίνεται από τη σχέση:

$$p - p_a = \rho g h$$

Έτσι η κατκόρυφη δύναμη στην οριζόντια επιφάνεια της θύρας έχει φορά προς τα επάνω, όπως φαίνεται στο Σχήμα, έχει μέτρο F_V και δίνεται από τη σχέση:

$$F_V = \rho g h H^2$$

Η θύρα θα ανοίξει, εάν εφαρμοστεί μια καθαρή ροπή με φορά αυτή των δεικτών του ρολογιού γύρω από τον άξονα στο σημείο B.

Το κέντρο πίεσης του κατακόρυφου τμήματος της θύρας, είναι:

$$z_{cp} = z_C + \frac{I}{z_C A} = \frac{1}{2}h + \frac{\frac{1}{12}h^3 H}{\left(\frac{1}{12}h\right)(hH)} = \frac{1}{2}h + \frac{1}{6}h = \frac{2}{3}h$$

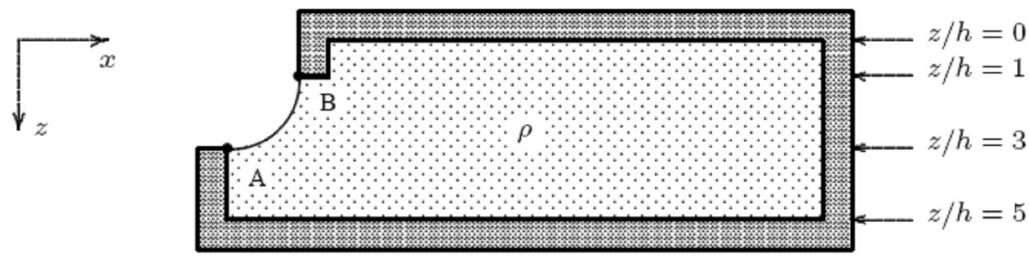
Οπότε, αν αντικαταστήσουμε τη δύναμη και το κέντρο πίεσης στην εξίσω ση ροπής, προκύπτει:

$$\frac{1}{2}\rho g h^2 H\left(h - \frac{2}{3}h\right) = \rho g h H^2\left(\frac{1}{2}H\right) \Rightarrow h^2 = 3H^2$$

Συνεπώς, η θύρα του φράγματος θα ανοίξει όταν: $h \geq \sqrt{3}H$

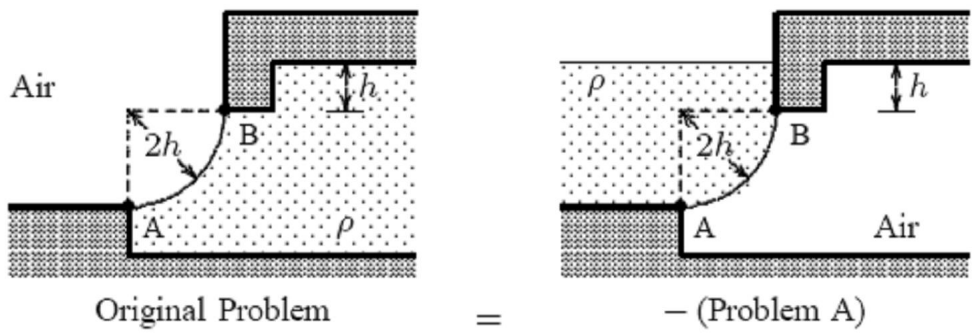
Πρόβλημα 3

Θεωρήστε την παρακάτω δεξαμενή νερού (πυκνότητας ρ) όπως φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα. Η δεξαμενή έχει πλάτος h στη διεύθυνση κάθετη στη σελίδα αυτή. Υπολογίστε την υδροστατική δύναμη, *F*, και το κέντρο πίεσης z_{cp} του κυκλικού τόξου *AB*.



Λύση

Αρχικά χρησιμοποιούμε την αρχή της υπέρθεσης που διευκρινίζεται στο ακόλουθο Σχήμα.



Για το πρόβλημα A, θεωρούμε ότι η προβολή της θύρας σε ένα κατακόρυφο επίπεδο έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλόγραμμου, ύψους 2h και πλάτους h. Έτσι το κέντρο βάρους, το εμβαδόν και η ροπή αδράνειας της προβολής είναι:

$$z_C = 2h, \quad A = 2h^2, \quad I_{yy} = \frac{1}{12}h\left(2h^3\right) = \frac{1}{6}h^4$$

Οι συνιστώσες της δύναμης για το πρόβλημα A είναι:

$$F_{x_A} = \rho g z_C A = \rho g(2h)\left(2h^2\right) = 4\rho g h^3$$

και

$$F_{z_A} = \rho g \forall = \rho g\left(2h^3\right) + \rho g\left[\frac{\pi}{4}(2h)^2\right]h = (2+\pi)\rho g h^3$$

Συνεπώς, το διάνυσμα της δύναμης του προβλήματος A είναι:

$$\vec{F}_A = \rho g h^3\left[4i + (2+\pi)k\right]$$

Έπειτα, αντιστρέφοντας το πρόσημο, η δύναμη που ασκείται στη θύρα του αρχικού προβλήματος είναι:

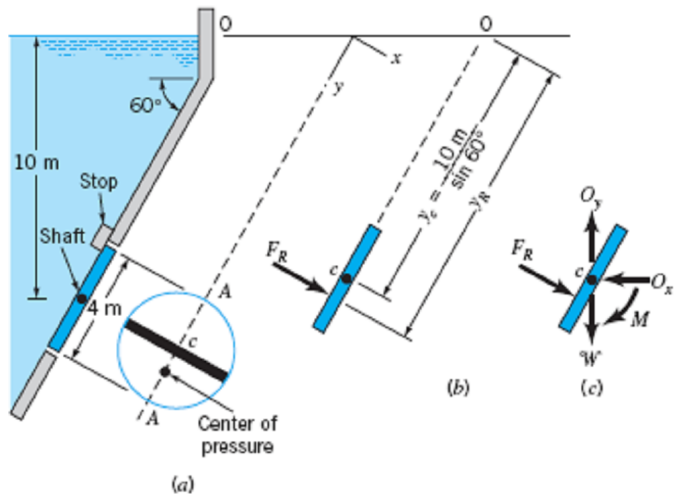
$$\vec{F} = -\rho g h^3\left[4i + (2+\pi)k\right]$$

Τέλος, η κατακόρυφη συνιστώσα του κέντρου πίεσης, είναι:

$$z_{cp} = z_C + \frac{I}{z_C A} = 2h + \frac{\frac{2}{3}h^4}{(2h)\left(2h^2\right)} = 2h + \frac{1}{6}h = \frac{13}{6}h$$

Πρόβλημα 4

Η κυκλική θύρα του παρακάτω σχήματος με διάμετρο 4 m βρίσκεται στο κεκλιμένο τοίχωμα μεγάλης δεξαμενής. Η θύρα στηρίζεται μέσω ενός άξονα κατά μήκος οριζόντιας διαμέτρου. Εάν ο άξονας της θύρας βρίσκεται σε βάθος νερού 10 m, να υπολογιστούν a) το μέτρο και η θέση όπου ασκείται η δύναμη από το νερό στη θύρα και β) η ροπή που πρέπει να ασκηθεί γύρω από τον άξονα για να ανοίξει η θύρα.



Λύση

a) Το μέτρο της δύναμης που ασκείται από το νερό στη θύρα είναι:

$$F_R = \gamma h_C A$$

και επειδή η κατακόρυφη απόσταση από την επιφάνεια του νερού στο κέντρο βάρους της θύρας είναι 10m προκύπτει:

$$F_R = \left(9.80\times10^3\,N/m^3\right)(10m)\left(4\pi\ m^2\right) = 1230\times10^3\,N = 1.23\,MN$$

Το κέντρο πίεσης όπου δρα η F_R δίδεται από τις σχέσεις:

$$x_{CP} = x_R = \frac{I_{XYC}}{y_C A} + x_C \quad \text{και} \quad y_{CP} = y_R = \frac{I_{XC}}{y_C A} + y_C\,.$$

Για το δεδομένο σύστημα συντετατγμένων, $x_{CP} = x_R = 0$ διότι η επιφάνεια είναι συμμετρική. Έτσι το κέντρο πίεσης βρίσκεται κατά μήκος της διαμέτρου A – A. Για τον υπολογισμό του $y_{CP} = y_R$ έχουμε,

$$I_{XXC} = \frac{\pi R^4}{4}$$

Το y_C φαίνεται στο μέρος (b) του Σχήματος. Έτσι,

$$y_{CP} = y_R = \frac{(\pi/4)(2\,m)^4}{\left(10\,m/\sin 60^0\right)\left(4\pi\ m^2\right)} + \frac{10\,m}{\sin 60^0} = 0.0866\,m + 11.55m = 11.6366\ m$$

και η απόσταση του κέντρου πίεσης (κατά μήκος της διαμέτρου A – A της θύρας) από τον άξονα περιστροφής της είναι:

$$y_R - y_C = 0.0866\,m$$

b) Η απαιτούμενη ροπή για να ανοίξει η θύρα υπολογίζεται με τη βοήθεια του διαγράμματος ελευθέρου σώματος, μέρος (C) του Σχήματος. Στο διάγραμμα αυτό W είναι το βάρος της θύρας, O_X και O_Y είναι η οριζόντια και η κατακόρυφη αντίδραση του άξονα στη θύρα. Αθροίζοντας τις ροπές γύρω από τον άξονα έχουμε:

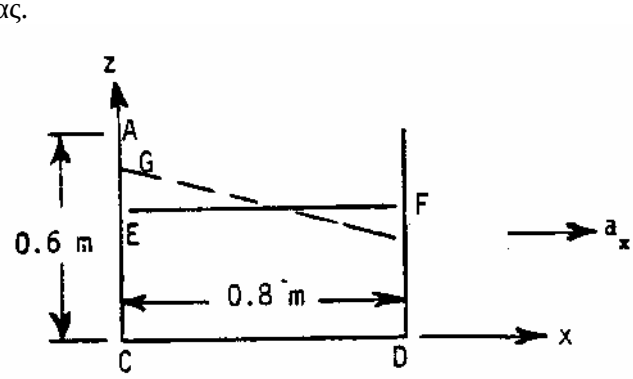
$$\sum M_C = 0$$

οπότε και προκύπτει:

$$M_R = F_R\left(y_R - y_C\right) = \left(1230\times10^3\, N\right)\left(0.0866\, m\right)$$
$$= 1.07\times10^5\, N\cdot m$$

Πρόβλημα 5

Το δοχείο του παρακάτω Σχήματος περιέχει νερό βάθους 0.4 m όταν είναι σε κατάσταση ηρεμίας.



a) Αν το σύστημα έχει οριζόντια επιτάχυνση προς τα δεξιά $a_x = 2.45 m/s^2$, βρείτε την κλίση της ελεύθερης επιφάνειας, την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας στο πίσω μέρος του δοχείου πάνω από το αρχικό επίπεδο και τη μανομετρική πίεση στα σημεία C και D.

b) Βρείτε τη μέγιστη δυνατή οριζόντια επιτάχυνση για να μη χυθεί το ρευστό.

Λύση:

(a) Από την εξίσωση: $\tan\beta = \dfrac{a_X}{g + a_Z} = \dfrac{a\cos\theta}{g + a\sin\theta}$, όπου $\alpha_Z = 0$ προκύπτει:

$$\tan\beta = \frac{2.45}{9.8} = \frac{1}{4},\ \beta = 14^o.$$

Η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας στο πίσω μέρος του δοχείου πάνω από το αρχικό επίπεδο είναι:

$$0.4\tan\beta = 0.1\ \text{m}$$

Η κατανομή της πίεσης ικανοποιεί τη σχέση:

$$P + \rho a_X x + \rho\left(g + a_Z\right)z = K \Rightarrow P + \rho\, 2.45x + \rho g z = p_{atm} + 0.5\gamma$$

όπου η σταθερά K προέκυψε από την ικανοποίηση της συνθήκης για $x = 0$ και $z = z_G$ $P = P_{atm}$.

Στο σημείο C: $x = 0$, $z = 0$ $P_C = P_{atm} + 0.5\gamma = 4900\, Pa$ μανομετρική

Στο σημείο D: $z = 0$, $x = 0.8 m$ $P_D = P_{atm} + 0.5\gamma - 0.2\gamma = 2940 Pa$ μανομετρική

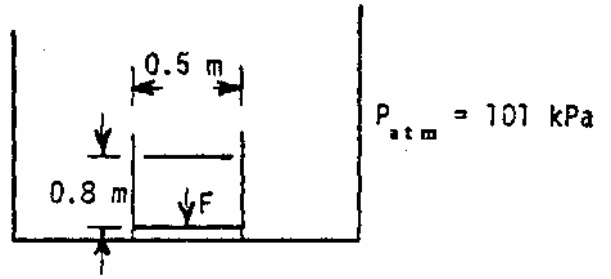
(b) Για τη συνθήκη της μέγιστης οριζόντιας επιτάχυνσης για να μη χυθεί το ρευστό, το σημείο G συμπίπτει με το σημείο A. Η κλίση της ελεύθερης επιφάνειας γίνεται:

$$\tan\beta = \frac{0.2}{0.4} = \frac{1}{2} = \frac{a_{X\max}}{g} \Rightarrow a_{X\max} = \frac{g}{2} = 4.9 \,m/s^2$$

Πρόβλημα 6

Ένα κυλινδρικό δοχείο διαμέτρου 0.5 m που περιέχει νερό βάθους 0.8 m τοποθετείται στο πάτωμα ενός ανελκυστήρα. Βρείτε τη δύναμη που ασκείται στον πυθμένα του δοχείου:

a) όταν ο ανελκυστήρας είναι στάσιμος
b) όταν ο ανελκυστήρας ανέρχεται με επιτάχυνση 0.3 g, και
c) όταν ο ανελκυστήρας κατέρχεται με επιτάχυνση 0.3 g.



Λύση:

(a) $F = A(P_{atm} + 0.8\gamma) = \frac{\pi 0.5^2}{4}(101 + 0.8 \times 9.8) \times 1000 = 21370\,N$

(b) Από την εξίσωση: $P + \rho a_X x + \rho(g + a_Z)z = K$ για $a_X = 0$, $a_Z = 0.3g$ και $P = P_{atm}$ όταν $z = 0.8$ προκύπτει

$$P + 1.3\gamma z = P_{atm} + 1.3\gamma\, 0.8$$

Στον πυθμένα, z = 0, η δύναμη, F, δίνεται από τη σχέση:

$$F = A(P_{atm} + 1.3\gamma\, 0.8) = \frac{\pi \times 0.5^2}{4}(101 + 10.2) \times 1000 = 21834\,N$$

(c) Για $a_Z = -0.3g$

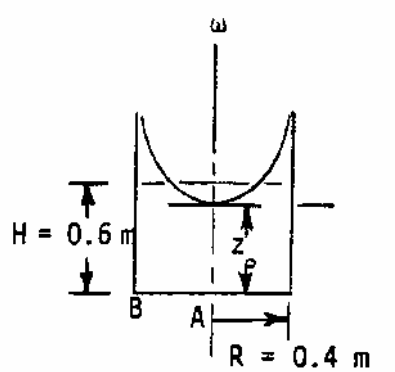
$$P + 0.7\gamma z = P_{atm} + 0.7\gamma\, 0.8$$

$$F = A(P_{atm} + 0.7\gamma\, 0.8) = \frac{\pi \times 0.5^2}{4}(101 + 5.49) \times 1000 = 20910\,\mathrm{N}$$

Πρόβλημα 7

Ένα κυλινδρικό δοχείο ακτίνας 0.4 m είναι γεμάτη με νερό βάθους 0.6 m. Όταν περιστρέφεται γύρω από τον κεντρικό άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα 5 rad/s, υπολογίστε:

a) την θέση της ελεύθερης επιφάνειας, και
b) την πίεση στα σημεία A και B.



Λύση:

a) Με συνθήκη ότι το ρευστό περιστρέφεται ως στερεό σώμα, η ελ εύθερη επιφάνεια έχει παραβολικό σχήμα που περιγράφεται από τη σχέση:

$$z = z_o + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

Μπορεί να αποδειχθεί μέσω ολοκλήρωσης, ότι ο όγκος κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια και πάνω από την επιφάνεια $z = z_o$ είναι $\frac{\pi\omega^2 R^4}{4g}$. Επειδή η μάζα του ρευστού στο δοχείο παραμένει σταθερή, προκύπτει:

$$z_0\pi R^2 + \frac{\pi R^4\omega^2}{4g} = H\pi R^2 \Rightarrow z_0 = \mathrm{H} - \frac{R^2\omega^2}{4g} = 0.6 - \frac{0.4^2 x 0.5^2}{4x9.8} = 0.498m$$

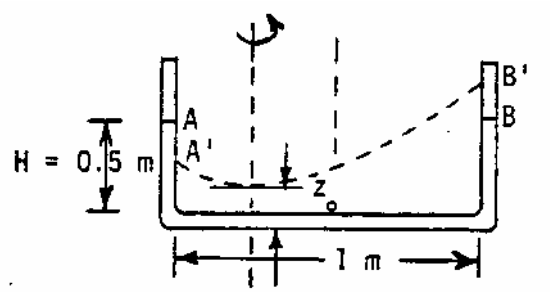
b) $P_A = P_{atm} + \gamma z_o = 101 + 0.498 \times 9.8 = 4.88\,kPa$ μανομετρική

c) Από την εξίσωση $P + \gamma z - \frac{\rho\omega^2 R^2}{2} = P_{atm} + \gamma z_o$ για $z_B = 0$ και $r_B = R$ προκύπτει

$$P_B - \frac{\omega^2 R^2 \rho}{2} = 4.88\,KPa \Rightarrow P_B = \frac{0.4^2 \times 5^2}{2} + 4.88 = 6.88\,KPa$$ μανομετρική

Πρόβλημα 8

Ένας σωλήνας ομοιόμορφης διατομής και σχήματος U πληρούται αρχικά με νερό όπως φαίνεται στο ακόλουθο Σχήμα.



Όταν ο σωλήνας περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα του Σχήματος με γωνιακή ταχύτητα 5 rad /sec, ποια θα είναι η πτώση της ελεύθερης επιφάνειας στο αριστερό σκέλος του σωλήνα;

Λύση:

Επειδή η εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας είναι:

$$z = z_o + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

έχουμε:

$$z'_A = z_o + \frac{(0.25)^2 \times 5^2}{2x9.8} = z_o + 0.0797$$

$$z'_B = z_o + \frac{(0.75)^2 \times 5^2}{2x9.8} = z_o + 0.718$$

Λαμβάνοντας υπόψη την αρχή διατήρησης της μάζας , έχουμε:

$$z'_A + z'_B = 2H = 2z_o + 0.7977 \Rightarrow z_o = \frac{(1 - 0.7997)}{2} = 0.101m$$

$$z'_A = 0.181\,m$$

$$z_A - z'_A = 0.5 - 0.181 = 0.319\,m$$

Πρόβλημα 9

Γιά το παρακάτω Σχήμα δίνονται:

$z_A = 1.2m, \qquad z_1 = 0.5m$

$z_2 = 0.8m, \qquad z_3 = 0.4m$

$z_B = 1.2m, \qquad \gamma_W = 9800\, N/m^3$

και $\gamma_m = 13.6\gamma_W$

Να βρεθεί η απόλυτη πίεση P_A του αέρα στη δεξαμενή.

Λύση

Χρησιμοποώντας τη σχέση της υδροστατικής πίεσης $P_2 - P_1 = -\rho g(z_2 - z_1) = \gamma(z_1 - z_2)$, έχουμε:

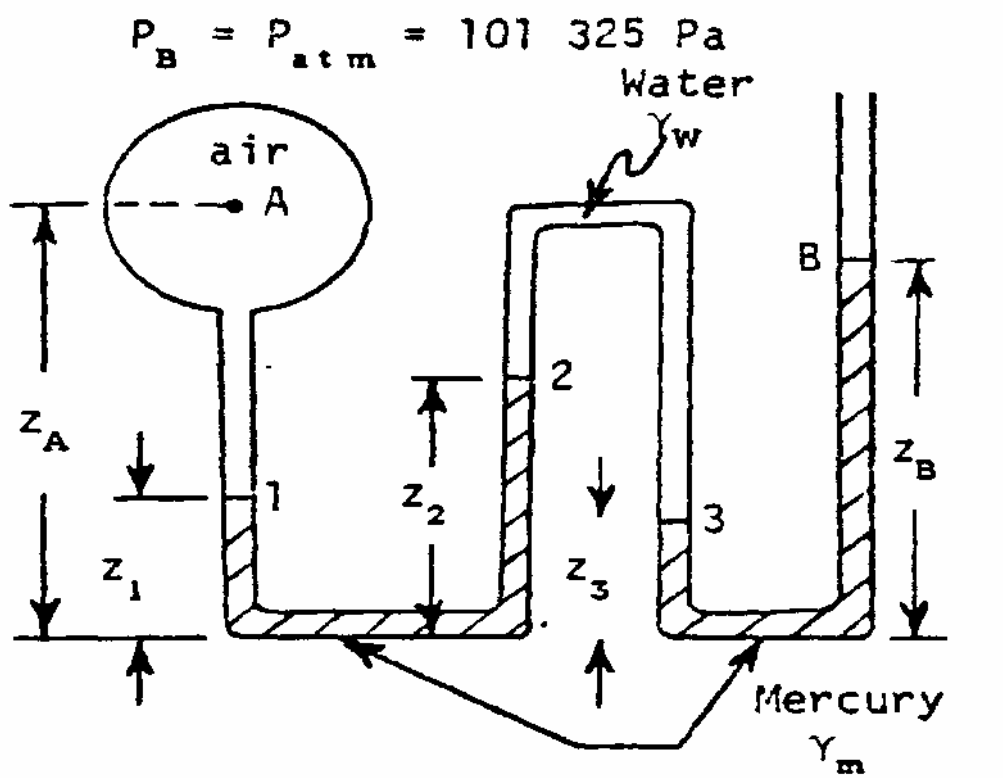
$$P_A - P_1 = \gamma_a(z_1 - z_A)$$
$$P_1 - P_2 = \gamma_{Hg}(z_2 - z_1)$$
$$P_2 - P_3 = \gamma_W(z_3 - z_2)$$
$$P_3 - P_B = \gamma_m(z_B - z_3)$$

Επειδή το γ_a είναι συνήθως μικρό σε σχέση με το γ_W ή το γ_m, η διαφορά πίεσης μεταξύ P_A και P_1 είναι αμελητέα. Εάν στις παραπάνω εξισώσεις Πρόσθεση κατά μέλη των παραπάνω εξισώσεων, δίνει:

$$P_A - P_B = \gamma_a(z_1 - z_A) + \gamma_{Hg}(z_2 - z_1) + \gamma_W(z_3 - z_2) + \gamma_{Hg}(z_B - z_3)$$
$$= 0.3\gamma_m - 0.4\gamma_W + 0.8\gamma_m = 142690\, Pa$$

και

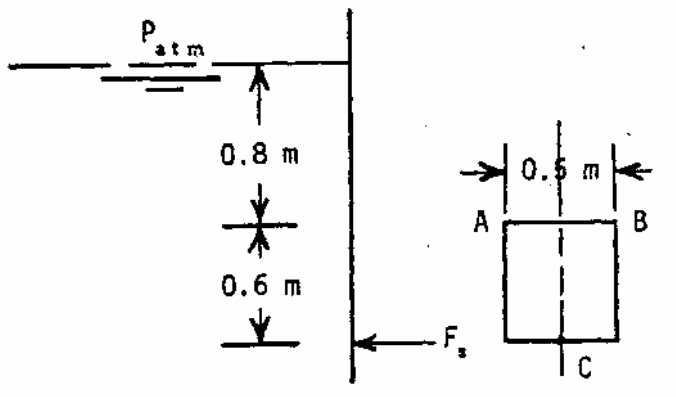
$$P_A = P_{atm} + 142690 = 142690\ Pa \text{ μανομετρική}$$



Πρόβλημα 10

Μια θύρα σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου με πλάτος $0.5\ m$ υπόκειται σε υδροστατική πίεση όπως φαίνεται στο παρακάτω. Να υπολογιστούν:

a) Η ολική δύναμη που ασκείται στη θύρα λόγω της υδροστατικής πίεσης
b) Οι συντεταγμένες του κέντρου πίεσης
c) Η δύναμη, F_s, που απαιτείται για να κρατά τη θύρα κλειστή όταν αυτή περιστρέφεται γύρω από το τμήμα AB.



Λύση

a) Η πίεση στο κέντρο βάρους της θύρας δίνεται από την σχέση:

$$P_C = P_{atm} + \gamma\left(z_{ref} - z_C\right) = P_{atm} + 9800(0.8 + 0.3)$$

Η συνολική δύναμη στη θύρα είναι:

$$F = \left(P_C - P_{atm}\right)A = 9800 \times 1.1 \times 0.5 \times 0.6 = 3234\,N$$

b) Από τις σχέσεις

$$y_{CP} = y_C + \frac{I_{\xi\xi}}{Ay_C},\ I_{\xi\xi} = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}0.5 \times 0.6^3$$

$$y_{CP} = (0.8 + 0.3) + \frac{0.5}{12}\frac{0.6^3}{0.5 \times 0.6 \times (0.8 + 0.3)} = 1.127\,m$$

Επίσης, $x_{CP} = x_C$ επειδή η θύρα είναι συμμετρική οπότε $I_{\xi\eta} = 0$.

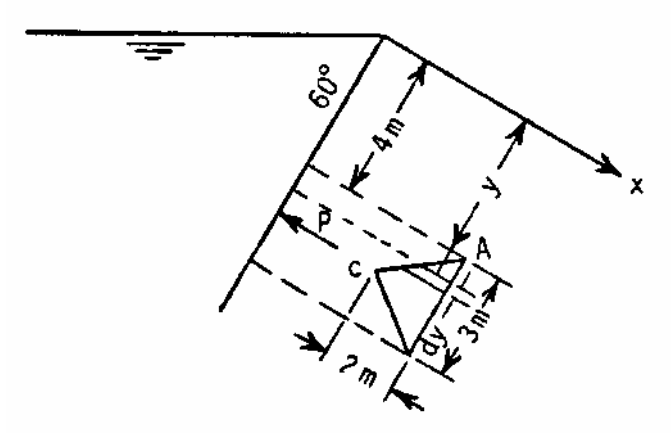
Συνεπώς, το κέντρο πίεσης είναι *0,027 m* κάτω από το κέντρο βάρους.

c) $F_s = \dfrac{F\left(y_{CP} - 0.8\right)}{0.6} = \dfrac{3234 \times 0.327}{0.6} = 1763\ N$

Πρόβλημα 11

Μια πόρτα τριγωνικού σχήματος περιστρέφεται κατά μήκος της ακμής AB και κρατείται κλειστή υπό την επίδραση δύναμης που εφαρμόζεται στο σημείο C. Να υπολογιστούν:

a) Η δύναμη που ασκείται στην πόρτα , μέσω ολοκλήρωσης.
b) Οι συντεταγμένες του κέντρου πίεσης.
c) Η δύναμη, P, που απαιτείται για να κρατείται η πόρτα κλειστή.



Λύση

a)

$$dF = (P - P_{atm})dA = \gamma y \sin\theta x dy \Rightarrow$$

όπου y κυμαίνεται από 4 m έως 5.5 m και x από 0 έως 2 m. Η εξίσωση που περιγράφει αυτή την μεταβολή είναι:

$$x = (y-4)\frac{2}{(5.5-4)} = \frac{2(y-4)}{1.5}$$

Όταν το y κυμαίνεται από 5.5 m έως 7 m, το x κειμένεται από 2 m έως 0 και η εξίσωση που περιγράφει αυτή την μεταβολή είναι:

$$x = 2 - \frac{(y-5.5)\times 2}{(7-5.5)} = 2 - \frac{2(y-5.5)}{1.5} = \frac{2}{1.5}(7-y)$$

Έτσι:

$$F = \gamma \sin\theta \left| \int_4^{5.5} xydy + \int_{5.5}^{7} xydy \right|$$

$$= \gamma \sin\theta \left| \int_4^{5.5} \frac{2}{1.5} y(y-4)dy + \int_{5.5}^{7} \frac{2}{1.5} y(7-y)dy \right|$$

$$= 9800 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2}{1.5} \left| \left(\frac{y^3}{3} - 2y^2 \right)_4^{5.5} + \left(\frac{7}{2}y^2 - \frac{y^3}{3} \right)_{5.5}^{7} \right| = 140036$$

Εναλλακτικά υπολογίζουμε τη δύναμη F ως εξής:

$$F = (P_C - P_{atm})A = 9800 \times 5.5 \times \sin 60^0 \frac{2\times 3}{2} = 140036\ N$$

b)

$$x_C = \frac{2}{3},\ y_C = 5.5$$

$$y_{CP} = y_C + \frac{I_{\xi\xi}}{Ay_C} = 5.5 + \frac{2}{12}\frac{2\times 1.5^3}{3\times 5.5} = 5.5068\,m$$

το οποίο είναι 0.068 m κάτω από το κέντρο βάρους.

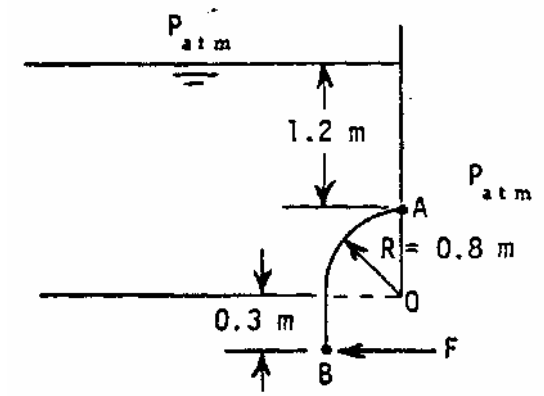
$x_{CP} = x_C$ επειδή η επιφάνεια είναι συμμετρική γύρω από τον άξονα ξ ο οποίος περνά από το κέντρο βάρους.

c) Η δύναμη, P, είναι:

$$P \times 2 = F \times \frac{2}{3} \Rightarrow P = \frac{F}{3} = 46678.67\,N$$

Πρόβλημα 12

Μια δεξαμενή έχει πόρτα σχήματος τόξου κύκλου, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Η πόρτα αυτή περιστρέφεται γύρω από τον άξονα που είναι κάθετος στο χαρτί και διέρχεται διαμέσου του σημείου Α. Αγνοήστε το βάρος της πόρτας.



a) Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκείται στην πόρτα ανά μονάδα πλάτους της, στη διεύθυνση κάθετη στο χαρτί.
b) Να υπολογιστεί η δύναμη F ανά μονάδα πλάτους της πόρτας που απαιτείται για να συγκρατεί την πόρτα κλειστή, εάν η F εφαρμόζεται στο σημείο Β.

Λύση

α) Για να υπολογίσουμε τη δύναμη $\vec{F}_P$ που ασκείται στην πόρτα λόγω υδροστατικής πίεσης, πρέπει να υπολογίσουμε τις συνιστώσες F_{PX} και F_{PZ}. Η προβολή της καμπύλης επιφάνειας της πόρτας στο κατακόρυφο επίπεδο είναι το Α – 0, και η οριζόντια συνιστώσα ανά μονάδα πλάτους σ' αυτήν την επιφάνεια προβολής δίνεται από την εξίσωση:

$$F_{PX} = A_x\left(P_c - P_{atm}\right) = A_x\gamma\left(z_{ref} - z\right)$$
$$= 0.8\times 9800(1.2+0.4) = 12544\ N/m$$

Η συνιστώσα της δύναμης ανά μονάδα πλάτους F_{PZ} στον άξονα z, είναι ίση με το βάρος του υπερκείμενου της πόρτας υγρού ανά μονάδα πλάτους. Δίνεται δε από τη σχέση:

$$F_z = \gamma\left[(1.2+0.8)\times 0.8 - \frac{\pi\times 0.8^2}{4}\right] = 10754\ N/m$$

Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_P$, είναι:

$$F_P = \sqrt{F_{PX}^2 + F_{PZ}^2} = 16522.7\ N/m$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{F_{PZ}}{F_{PX}} = 40.6^0$$

Τα σημεία εφαρμογής των F_{PX} και F_{PZ} είναι το κέντρο πίεσης της προβολής της επιφάνειας στο κατακόρυφο επίπεδο και το κέντρο βάρους του υπερκείμενου της πόρτας ρευστού, αντίστοιχα. Παρόλα αυτά, στο παρών πρόβλημα η συνισταμένη δύναμη $\vec{F}_P$, πρέπει να περνάει από τον κυλινδρικό άξονα της πόρτας, επειδή κάθε στοιχειώδης δύναμη λόγω υδροστατικής πίεσης που είναι κάθετη στη στοιχειώδη επιφάνεια διέρχεται από τον κυλινδρικό άξονα της πόρτας θα διέρχεται και η συνισταμένη αυτών.

β) Για στατική ισορροπία, πρέπει $\sum M_A = 0$. Αθροίζοντας όλες τις ροπές γύρω από το σημείο Α, έχουμε:

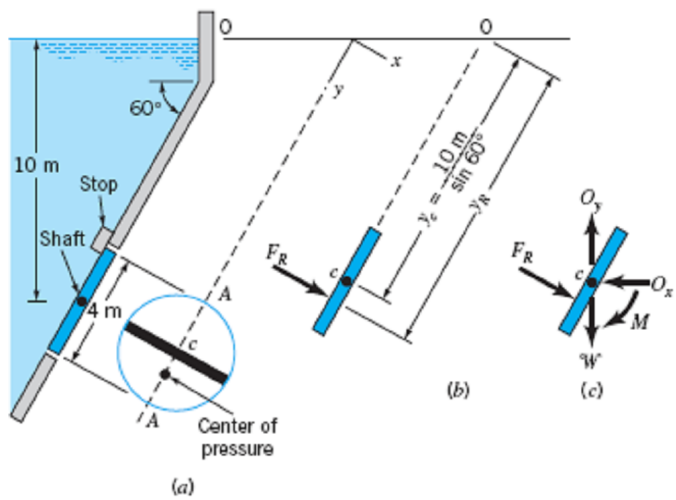
$$F_P \times R\cos\theta = (16522.7)\cos 40.6^0 = F(0.8+0.3)$$

οπότε προκύπτει:

$$F = 9123\ N/m$$

Παράδειγμα 13

Η κυκλική θύρα του παρακάτω σχήματος με διάμετρο 4 m βρίσκεται στο κεκλιμένο τοίχωμα μεγάλης δεξαμενής. Η θύρα στηρίζεται μέσω ενός άξονα κατά μήκος οριζόντιας διαμέτρου. Εάν ο άξονας της θύρας βρίσκεται σε βάθος νερού 10 m, να υπολογιστούν a) το μέτρο και η θέση όπου ασκείται η δύναμη από το νερό στη θύρα και β) η ροπή που πρέπει να ασκηθεί γύρω από τον άξονα για να ανοίξει η θύρα.



Λύση

a) Το μέτρο της δύναμης που ασκείται από το νερό στη θύρα είναι:

$$F_R = \gamma h_C A$$

και επειδή η κατακόρυφη απόσταση από την επιφάνεια του νερού στο κέντρο βάρους της θύρας είναι 10m προκύπτει:

$$F_R = (9.80\times10^3\ N/m^3)(10m)(4\pi\ m^2) = 1230\times10^3\ N = 1.23\,MN$$

Το κέντρο πίεσης όπου δρα η F_R δίδεται από τις σχέσεις:

$$x_{CP} = x_R = \frac{I_{XYC}}{y_C A} + x_C \quad \text{και} \quad y_{CP} = y_R = \frac{I_{XXC}}{y_C A} + y_C\,.$$

Για το δεδομένο σύστημα συντεταγμένων, $x_{CP} = x_R = 0$ διότι η επιφάνεια είναι συμμετρική. Έτσι το κέντρο πίεσης βρίσκεται κατά μήκος της διαμέτρου Α – Α. Για τον υπολογισμό του $y_{CP} = y_R$ έχουμε,

$$I_{XXC} = \frac{\pi R^4}{4}$$

Το y_C φαίνεται στο μέρος (b) του Σχήματος. Έτσι,

$$y_{CP} = y_R = \frac{(\pi/4)(2\,m)^4}{(10\,m/\sin 60^0)(4\pi\ m^2)} + \frac{10\,m}{\sin 60^0} = 0.0866\,m + 11.55m = 11.6366\ m$$

και η απόσταση του κέντρου πίεσης (κατά μήκος της διαμέτρου A – A της θύρας) από τον άξονα περιστροφής της είναι:

$$y_R - y_C = 0.0866\,m$$

b) Η απαιτούμενη ροπή για να ανοίξει η θύρα υπολογίζεται με τη βοήθεια του διαγράμματος ελευθέρου σώματος, μέρος (C) του Σχήματος. Στο διάγραμμα αυτό W είναι το βάρος της θύρας, O_X και O_Y είναι η οριζόντια και η κατακόρυφη αντίδραση του άξονα στη θύρα. Αθροίζοντας τις ροπές γύρω από τον άξονα έχουμε:

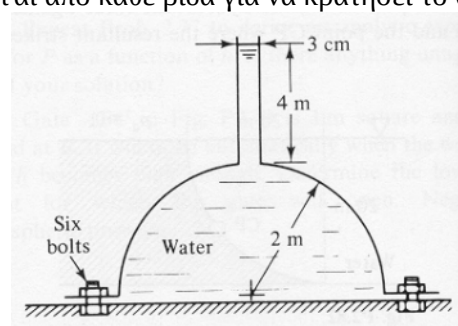
$$\sum M_C = 0$$

οπότε και προκύπτει:

$$M_R = F_R(y_R - y_C) = \left(1230\times10^3\,N\right)\left(0.0866\,m\right)$$
$$= 1.07\times10^5\,N\cdot m$$

Πρόβλημα 14

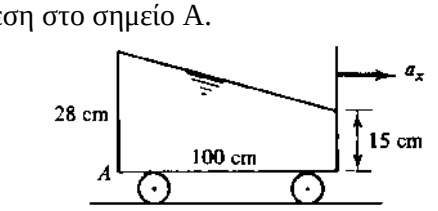
Ο ημισφαιρικός θόλος της δεξαμενής που είναι γεμάτη με νερό, του παρακάτω σχήματος, ζυγίζει 30 kN και στηρίζεται στο δάπεδο με έξι βίδες. Ποια είναι η δύναμη που χρεάζεται να ασκείται από κάθε βίδα για να κρατήσει το θόλο στην θέση του;



Πρόβλημα 15

Το δοχείο με νερό του παρακάτω σχήματος επιταχύνεται προς τα δεξιά με το ρευστό σε στερεά κίνηση. Υπολογίστε:

a) την επιτάχυνση a_x σε m/s^2, και
b) την μανομετρική πίεση στο σημείο A.



Πρόβλημα 16

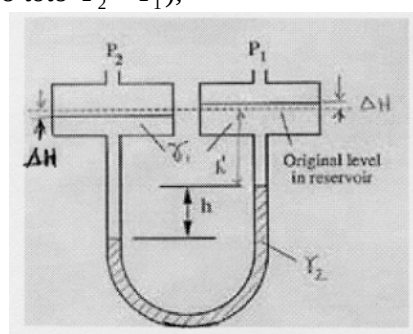
Κατά την απογείωση ενός αεροπλάνου από ένα αεροδρόμιο το οποίο βρίσκεται σε υψόμετρο 600m το μανόμετρο στο πιλοτήριο του αεροπλάνου δείχνει απόλυτη πίεση100 kPa.

a) Σε τι υψόμετρο θα βρίσκεται το αεροπλάνο, αν το ίδιο μανόμετρο δείχνει πίεση 65 kPa; Η θερμοκρασία του αέρα τη στιγμή της απογείωσης του αεροπλάνου είναι 15°C και μειώνεται με το υψόμετρο κατά 0.00650K/m.
b) Στο υψόμετρο αυτό υπολογίστε την πυκνότητα, την θερμοκρασία και το κινηματικό ιξώδες του αέρα.

Πρόβλημα 17

Ένα μικρομανόμετρο, όπως φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα, χρησιμοποιείται για την μέτρηση μικρών διαφορών πίεσης αέρα, $P_2 - P_1$. Αποτελείται από δύο μεγάλα δοχεία, αμφότερα με διατομή A_r και περιέχουν υγρό ειδικού βάρους γ_1. Τα δύο δοχεία επικοινωνούν με ένα σωλήνα σχήματος U διατομής, A_t, ο οποίος περιέχει υγρό ειδικού βάρους, γ_2. Όταν εφαρμόζεται μια διαφορά πίεσης στον αέρα $P_2 - P_1$, τότε αναπτύσσεται μια διαφορά ύψους στον σωλήνα U. Υποθέστε ότι αρχικά το ύψος του υγρού 1 σε κάθε δοχείο είναι ίδιο, καθώς και το ύψος του υγρού 2 σε κάθε σκέλος του
σωλήνα U.

a) Όταν εφαρμόζεται μια διαφορά πίεσης, η αλλαγή του ύψους του υγρού σε κάθε δοχείο είναι ΔH. Υπολογίστε το ΔH συναρτήσει του A_r και A_t.
b) Βρείτε την σχέση που εκφράζει το $P_2 - P_1$ και εξαλείψτε το ΔH χρησιμοποιώντας την ευρεθείσα σχέση για αυτό.
c) Απλοποιείστε την ευρεθείσα σχέση για $A_t / A_r \prec\prec 1$.
d) Πως μπορείτε να κάνετε το μικρομανόμετρο περισσότερο ευαίσθητο (το h να είναι μεγάλο για το ίδιο $P_2 - P_1$);



Πρόβλημα 18
Ο υδροφράχτης ΑΒ του παρακάτω σχήματος έχει πλάτος 10 m στην κατεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του χαρτιού και σχήμα παραβολικό, και με άξονα περιστροφής στο σημείο Β. Υπολογίστε την δύναμη F που απαιτείται για να κρατήσει τον υδατοφράχτη σε ισορροπία.

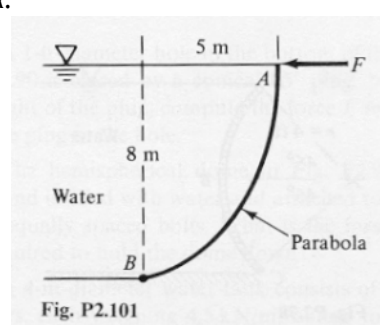
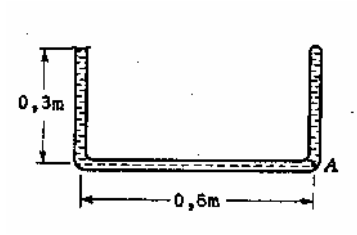


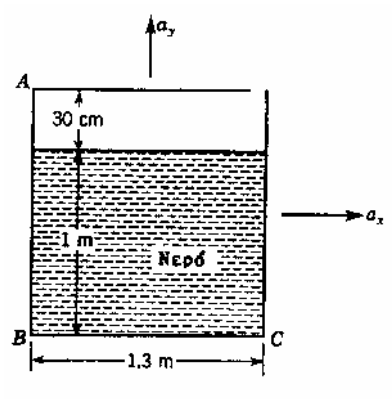
Fig. P2.101

Πρόβλημα 19
Να βρείτε τη θέση του κατακόρυφου άξονα περιστροφής και την ταχύτητα περιστροφής του σωλήνα U του παρακάτω σχήματος έτσι ώστε η υδροστατική πίεση του υγρού στο μέσο του σωλήνα U καθώς και στο Α να είναι μηδέν.



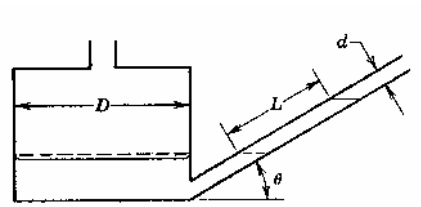
Πρόβλημα 20

Το δοχείο με νερό του παρακάτω σχήματος επιταχύνεται προς τα δεξιά με σταθερά επιτάχυνση $a_x = 9.806\, m/s^2$, $a_y = 0\ m/s^2$.. Βρείτε τις πιέσεις στα A, B και C.



Πρόβλημα 21

Το κεκλιμένο μανόμετρο του παρακάτω Σχήματος αποτελείται από δοχείο διαμέτρου $D = 90\,\text{mm}$, κεκλιμένο σωλήνα διαμέτρου $d = 6\,\text{mm}$, και μανομετρικό υγρό σχετικής ειδικής βαρύτητας 0.827. Το μήκος μέτρησης του κεκλιμένου σωλήνα είναι $0.6\,\text{m}$, $\theta = 30^o$. Υπολογίστε τη μέγιστη πίεση, σε Pa, που μπορεί να μετρηθεί με το μανόμετρο.



Πρόβλημα 22

Εάν η κατανομή πίεσης σε ένα ρευστό είναι:

$$p = xy + (x + z^2) + 10 \qquad kPa$$

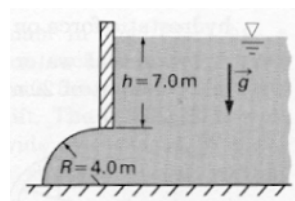
ποια είναι η δύναμη ανά μονάδα όγκου σε ένα στοιχείο ρευστού στην κατεύθυνση

$$\vec{n} = 0.95\vec{i} + 0.32\,\vec{j} \qquad m$$

στην θέση $x = 10\,\text{m},\ y = 3\,\text{m},\ z = 4\,\text{m}$;

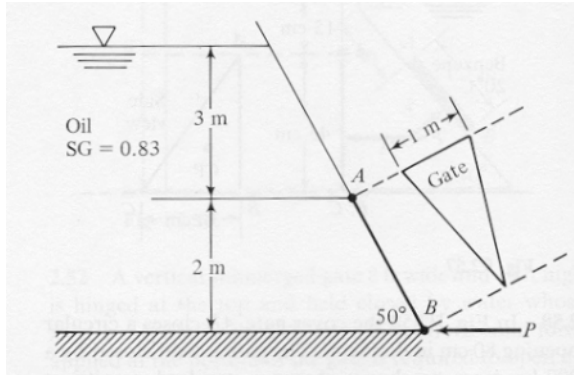
Πρόβλημα 23

Βρείτε το μέτρο και την θέση που εφαρμόζεται η συνολική δύναμη, λόγω υδροστατικής πίεσης, στο κυκλικό τόξο του παρακάτω σχήματος, το πλάτος του οποίου είναι 25 m.



Πρόβλημα 24

Η πόρτα σε μορφή ισοσκελούς τριγώνου του παρακάτω σχήματος περιστρέφεται γύρω από το σημείο Α και έχει μηδέν βάρος. Για να κρατηθεί κλειστή απαιτείται η οριζόντια δύναμη $\vec{P}$ που εφαρμόζεται στο σημείο Β. Ποιο είναι το μέγεθος της δύναμης αυτής;



Πρόβλημα 25

Εάν η κατανομή πίεσης σε ένα ρευστό είναι:

$$p = xy + (x + z^2) + 10 \qquad kPa$$

ποια είναι η δύναμη ανά μονάδα όγκου σε ένα στοιχείο ρευστού στη ν κατεύθυνση

$$\vec{n} = 0.95\vec{i} + 0.32\vec{j} \qquad m$$

στη θέση $x = 10\,\text{m},\ y = 3\,\text{m},\ z = 4\,\text{m}$;