Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πειραιά

Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών
Τμήμα Μηχανολογίας

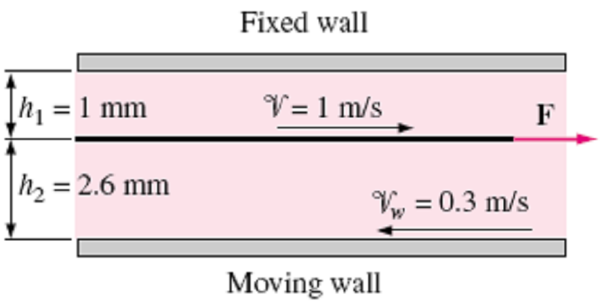
Μηχανική Ρευστών
Κεφάλαιο 1
Λυμένα Προβλήματα

Πρόβλημα 1

Μια αμελητέου πάχους επίπεδη πλάκα διαστάσεων (20 cm)x(20 cm) έλκεται με ταχύτητα 1m/s οριζόντια διαμέσου ενός στρώματος λαδιού πάχους 3.6 mm μεταξύ δύο επίπεδων πλακών εκ των οποίων η μία είναι ακίνητη και η άλλη κινείται με σταθερή ταχύτητα 0.3m/s, όπως φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα. Το δυναμικό ιξώδες του λαδιού είναι $\mu = 0.027\, Pa \cdot s = 0.027\, N \cdot s / m^2$.

Εάν θεωρήσουμε ότι η ταχύτητα κάθε στρώματος λαδιού μεταβάλλεται γραμμικά, ζητείται να βρεθούν:

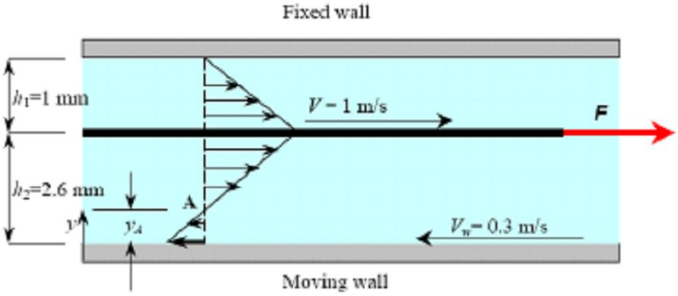
a) το σημείο όπου το λάδι έχει μηδενική ταχύτητα, καθώς επίσης και
b) η δύναμη που ασκείται στην πλάκα για να διατηρηθεί η κίνησή της.



Λύση

α) Η κατανομή της σχετικής ταχύτητας ως προς την ακίνητη πλάκα δίνεται στο παρακάτω Σχήμα. Το σημείο όπου η ταχύτητα είναι μηδέν είναι το A και η απόστασή του από την κάτω πλάκα υπολογίζεται γεωμετρικά (από την ομοιότητα των δύο τριγώνων του κατώτερου στρώματος λαδιού) και είναι:

$$\frac{2.6 - y_A}{y_A} = \frac{1}{0.3} \Rightarrow y_A = 0.60\ mm$$



β) Τα μέτρα των διατμητικών τάσεων που ενεργούν στην άνω και κάτω επιφάνεια της κινούμενης πλάκας είναι:

$$F_{\text{Άνω διατ.}} = \tau_u \cdot A_S = \mu A_S \left|\frac{du}{dy}\right| = \mu A_S \frac{V-0}{h_1} = \left(0.027\, N\cdot s/m^2\right)\left(0.2\cdot 0.2\, m^2\right)\frac{1 m/s}{1.0\cdot 10^{-3}} = 1.08\ N$$

$$F_{\text{Κάτω διατ.}} = \tau_u \cdot A_S = \mu A_S \left|\frac{du}{dy}\right| = \mu A_S \frac{V-V_w}{h_2} = \left(0.027\, N\cdot s/m^2\right)\left(0.2\cdot 0.2\, m^2\right)\frac{[1-(-0.3)]\, m/s}{2.6\cdot 10^{-3}\, m} = 0.54\ N$$

Και οι δύο διατμητικές τάσεις έχουν αντίθετη φορά από την κίνηση της πλάκας, έτσι η δύναμη F που ασκείται στην πλάκα είναι:

$$F = F_{\text{Άνω διατ.}} + F_{\text{Κάτω διατ.}} = 1.08 + 0.54 = 1.62\ N$$

Πρόβλημα 2

Η διαφορά πίεσης, ΔP, διαμέσου αρτηρίας που έχει εν μέρει φράξει (στένωσης) δίνεται προσεγγιστικά από την εξίσωση:

$$\Delta P = \frac{K_v \mu V}{D} + K_u\left(\frac{A_0}{A_1} - 1\right)^2 \rho V^2$$

Όπου, V η ταχύτητα του αίματος, μ το ιξώδες του ($FL^{-2}T$), ρ η πυκνότητά του (ML^{-3}), D η διάμετρος της αρτηρίας, A_0 η διατομή της αρτηρίας και A_1 το εμβαδό της στένωσης. Να προσδιοριστούν οι διαστάσεις των σταθερών K_v και K_u. Είναι η εξίσωση αυτή έγκυρη σε κάθε σύστημα μονάδων;

Λύση

$$\Delta p = K_v \frac{\mu V}{D} + K_u\left[\frac{A_0}{A_1} - 1\right]^2 \rho V^2$$

$$\left[FL^{-2}\right] \doteq \left[K_v\right]\left[\left(\frac{FT}{L^2}\right)\left(\frac{L}{T}\right)\left(\frac{1}{L}\right)\right] + \left[K_u\right]\left[\frac{\left(L^2\right)}{\left(L^2\right)} - 1\right]^2\left[\frac{FT^2}{L^4}\right]\left[\frac{L}{T}\right]^2$$

$$\left[FL^{-2}\right] \doteq \left[K_v\right]\left[FL^{-2}\right] + \left[K_u\right]\left[FL^{-2}\right]$$

Επειδή κάθε όρος της εξίσωσης πρέπει να έχει τις ίδιες διαστάσεις, οι σταθερές K_v και K_u είναι αδιάστατες. Κατά συνέπεια η εξίσωση είναι ομογενής και έγκυρη σε οποιοδήποτε σύστημα μονάδων.

Πρόβλημα 3

Σύμφωνα με πληροφορίες που βρέθηκαν σ' ένα παλαιό βιβλιο, η απώλεια ενέργειας ανά μονάδα βάρους ενός ρευστού που ρέει διαμέσου ενός ακροφυσίου που είναι συνδεδεμένος με ένα σωλήνα, μπορεί να υπολογιστεί από την ακόλουθη σχέση:

$$h = (0.07)\left(D/d\right)^4 V^2/2g$$

όπου h είναι η απώλεια ενέργειας ανά μονάδα βάρους, D η διάμετρος του σωλήνα, d η διάμετρος εξόδου του ακροφυσίου, V η ταχύτητα του ρευστού στο σωλήνα και g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Είναι η εξίσωση αυτή έγκυρη σε κάθε σύστημα μονάδων; Εξηγήστε.

Λύση

$$h = (0.07)\left(\frac{D}{d}\right)^4 \frac{V^2}{2g}$$

$$\left[\frac{FL}{F}\right] \doteq [0.07]\left[\frac{L^4}{L^4}\right]\left[\frac{1}{2}\right]\left[\frac{L^2}{T^2}\right]\left[\frac{T^2}{L}\right]$$

$$[L] \doteq [0.07][L]$$

Επειδή κάθε όρος της σχέσης πρέπει να έχει τις ίδιες διαστάσεις, η σταθερά 0.07 πρέπει να είναι αδιάστατη. Κατά συνέπεια η εξίσωση είναι ομογενής και έγκ υρη σε οποιοδήποτε σύστημα μονάδων.

Πρόβλημα 4

Στην Υδραυλική, η ογκομετρ ική παροχή, Q, κατά τη ροή ρευστών σε αγωγούς κυκλικής διατομής, υπολογίζεται συνήθως από την εμπειρική εξίσωση των Hazen-Williams [2]:

$$Q = 61.9 d^{2.63}\left(\frac{dp}{dx}\right)^{0.54} \qquad (1)$$

όπου d είναι η εσωτερική διάμετρος του αγωγού) και (dp/dx) η ανά μονάδα μήκους πτώση πίεσης κατά τη διεύθυνση της ροής. Να εξεταστεί αν η εξίσωση των Hazen - Williams είναι διαστατικά ομοιογενής.

Λύση

Σύμφωνα με την αρχή της διαστατικής ομοιογένειας, για να είναι μια εξίσωση διαστατικά ομοιογενής πρέπει τα δύο μέλη της να έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Επομένως, για να δούμε αν η εξίσωση των Hazen-Williams είναι διαστατικά ομοιογενής πρέπει να ελέγξουμε αν ισχύει η εξίσωση:

$$\{Q\} = \left\{61.9 d^{2.63}\left(\frac{dp}{dx}\right)^{0.54}\right\} \qquad (2)$$

Για το σκοπό αυτό, προσδιορίζουμε χωριστά τις διαστάσεις των δύο μελών της εξίσωσης (2). Έτσι, ως προς το σύστημα LMTΘ, προκύπτουν οι εξισώσεις διαστάσεων:

$$\{Q\} = \frac{\{\text{Όγκος}\}}{\{\text{Χρόνος}\}} = \frac{\{L^3\}}{T} = \{L^3 T^{-1}\} \qquad (3\alpha)$$

$$\left\{61.9 d^{2.63}\left(\frac{dp}{dx}\right)^{0.54}\right\} = \{61.9\}\{L\}^{2.63}\left\{\frac{L^{-1}MT}{L}\right\}^{0.54} = \{61.9\}\{L^{1.55} M^{0.54} T^{-1.08}\} \qquad (3\beta)$$

Λόγω των εξισώσεων (3α) και (3β), η εξίσωση (2) γράφεται:

$$\{L^3 T^{-1}\} = \{61.9\}\{L^{1.45} M^{0.54} T^{-1.08}\} \qquad (4)$$

Η εξίσωση αυτή δείχνει ότι, για να είναι η εξίσωση (1) διαστατικά ομοιογενής, η αριθμητική σταθερά (61.9) πρέπει να έχει διαστάσεις, τις εξής:

$$\{61.9\} = \{L^{1.45} M^{0.54} T^{0.08}\} \qquad (5)$$

Άρα, η εξίσωση των Hazen-Williams δεν είναι διαστατικά ομοιογενής, εκ τός αν η αριθμητική σταθερά (61.9) έχει διαστάσεις: 1.45, 0.54, 0. 08, 0.

Πρόβλημα 5

Ένα μεταλλικό δοχείο διαστέλλεται σε όγκο κατά 1. 2 % όταν αυξάνεται η πίεση στο εσωτερικό του κατά 75 MPa. Σε πίεση 100 *kPa*, το δοχείο χωράει 500 kg νερό πυκνότητας *1000 kg/m*^{3}. Αν το μέτρο συμπιεστότητας του νερού είναι

$480 \times 10^{-12}\ Pa^{-1}$, πόσο νερό πρέπει να προστεθεί στο δοχείο (όταν αυτό είναι γεμάτο) για να αυξηθεί η πίεση στο εσωτερικό του κατά 75 $M\,Pa$;

Λύση

Η ποσότητα, *Δm*, του νερού που πρέπει να προστεθεί στο δ οχείο, ώστε να αυξήσει την πίεσή του κατά 75 MPa, είναι ίση με τη διαφορά:

$$\Delta m = m_\tau - m_0 \qquad (1)$$

όπου $m_0 (= 500 kg)$ είναι η αρχική και m_τ η τελική ποσότητα του νερού στο δοχείο, ίση με το γινόμενο της τελικής πυκνότητας, ρ_τ, επί τον τελικό όγκο, V_τ:

$$m_\tau = \rho_t \forall_t \qquad (2)$$

Η τελική πυκνότητα του ν ερού είναι ίση με το άθροισμα:

$$\rho_\tau = \rho_0 + \Delta\rho \qquad (3)$$

όπου $\rho_0 = 1000\ kg/m^3$ και $\Delta\rho$ η μεταβολή της πυκνότητας του νερού που οφεί λεται στην αύξηση της πίεσης κατά 75 MPa. Η μεταβολή $\Delta\rho$ της πυκνότητας υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$k = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T \qquad (4)$$

Επειδή το μέτρο *k* του νερού θεωρείται σταθερό, η εξίσωση (4) γράφεται:

$$\Delta\rho = k\rho\Delta p \qquad (5)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (5) τις τιμές των μεγεθών $k, \rho,$ και Δp, προκύπτει:

$$\Delta\rho = \left(480 \times 10^{-12}\ Pa^{-1}\right)\left(1000\ kg/m^3\right)\left(75 \times 10^6\ Pa\right) = 36\,kg/m^3 \qquad (6)$$

Άρα, η τελική πυκνότητα του νερού είναι :

$$\rho_\tau = [(1000) + (36)]kg/m^3 = 1036\,kg/m^3 \qquad (7)$$

Ο όγκος $\forall_\tau$ του νερού υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\forall_\tau = 1.012\forall_0 = 1.012(m_0/\rho_0) = 1.012\left[(500kg)/\left(1000kg/m^3\right)\right] = 0.50\,m^3 \qquad (8)$$

Επομένως η μάζα m_τ του νερού θα είναι :

$$m_\tau = \left(1036kg/m^3\right)\left(0.506m^3\right) = 524.2\ kg \qquad (9)$$

οπότε από την εξίσωση (1) προκύπτει η τιμή της μάζας Δm:

$$\Delta m = [(524.2) - (500)]kg = 24.2\ kg \qquad (10)$$

Άρα στο δοχείο πρέπει να προστεθούν 24,2 kg νερού.

Πρόβλημα 6

Να υπολογιστούν: (α) το δυναμικό ιξώδες (σε centipose) και (β) το κινηματικό ιξώδες (σε stokes) αερίου οξυγόνου το οποίο βρίσκεται σε θερμοκρασία 20° C και πίεση 150 kPa.

Λύση

α. Επειδή το οξυγόνο βρίσκεται σε χαμηλή πίεση (150 kPa), το δυναμικό ιξώδες του μπορεί να υπολογιστεί από την εμπειρική σχέση:

$$\mu = a + bT + cT^2 \qquad (1)$$

Οι τιμές των σταθερών a, b, c και d της εξίσωσης (1) δίνονται από πίνακα για το οξυγόνο είναι :

$$a = 18.11 \qquad b = 66.32 \times 10^{-2} \qquad c = -187.9 \times 10^{-6} \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην εξίσωση (1) και θέτοντας σε αυτήν $T = 293\ K$ υπολογίζουμε το ιξώδες *μ* του οξυγόνου σε micropoise (μP)

$$\mu = (18.11) + \left(66.32 \times 10^{-2}\right)(293) + \left(-187.9 \times 10^{-6}\right)(293)^2 \approx 196\,\mu P \quad (3)$$

Άρα, το ιξώδες *μ* του οξυγόνου σε centipoise είναι: $\mu = 0.0196\,cP$

β. Το κινηματικό ιξώδες, ν, υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$\nu = \mu / \rho$$

Επειδή το οξυγόνο βρίσκεται σε χαμηλή πίεση, μπορούμε να το θεωρήσουμε σαν τέλειο αέριο. Έτσι, η πυκνότητά του ρ μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση των τελείων αερίων:

$$\rho = \frac{p}{R^* T}$$

Η ειδική σταθερά, R^*, του οξυγόνου είναι:

$$R^* = 259.83\ J/(kg \cdot K) \qquad (7)$$

Ήδη μπορούμε να προχωρήσουμε σε αριθμητική εφαρμογή της εξίσωσης (3):

$$\rho = \frac{150 \times 10^3\, Pa}{[259.83\, J/(kg \cdot K)](293K)} = 1.97\, kg/m^3 \qquad (8)$$

οπότε από την εξίσωση (5) προκύπτει:

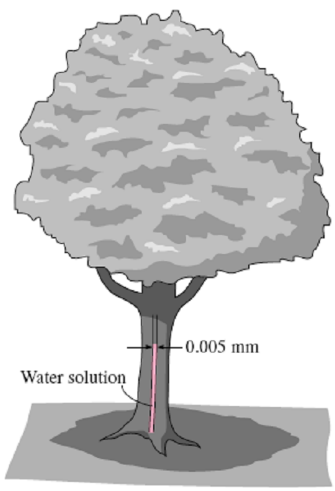
$$\nu = \frac{0.0196 \times 10^{-3}\, Pa \cdot s}{1.97\, kg/m^3} = 9.95 \times 10^{-6}\ m^2/s \qquad (9)$$

Και σε stokes $(1\ St = 10^{-4}\ m^2/s)$: (10)

Άρα, το οξυγόνο σε θερμοκρασία $20\ ^oC$ και πίεση 150 kPa έχει δυναμικό ιξώδες 0.0196 centipoise και κινηματικό ιξώδες 0.0995 stokes.

Πρόβλημα 7

Τα θρεπτικά συστατικά που διαλύονται μέσα σε νερό μεταφέρονται στα υψηλότερα μέρη των φυτών μέσω μικροσκοπικών σωλήνων εν μέρει λόγω του τριχοειδούς φαινομένου. Υπολογίστε πόσο ψηλά μπορεί να ανυψωθεί το διάλυμα νερού σ' ένα σωλήνα διαμέτρου 0.005mm ενός δέντρου ως αποτέλεσμα του τριχοειδούς φαινομένου. Θεωρείστε το διάλυμα ως νερό στους 20^{o}C και με γωνία επαφής 15^o.



Λύση:

Υποθέσεις: Το υγρό μπορεί να θεωρηθεί ως νερό με γωνία επαφής 15^o και η διάμετρος του σωλήνα σταθερή. Η θερμοκρασία του διαλύματος νερού είναι 20 ^{o}C.

Ιδιότητες: Η επιφανειακή τάση του νερού στους 20^{o}C είναι σ_s = 0.073 N/m και η πυκνότητα του διαλύματος νερού 1000 kg/m^3. Η γωνία επαφής δίνεται ίση με 15^o.

Ανάλυση: Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές, η ανύψωση του τριχοειδούς υπολογίζεται από τη σχέση:

$$h = \frac{2\sigma_s \cos\phi}{\rho g R} = \frac{2(0.073\,\text{N/m})(\cos 15°)}{(100\,\text{kg/m}^3)(9.81\,\text{m/s}^2)(2.5\times10^{-6}\ \text{m})}\left(\frac{1\,\text{kg}\cdot\text{m/s}^2}{1\,\text{N}}\right) = 5.75\,\text{m}$$

Άλλες επιδράσεις όπως η χημική διαφορά δυναμικού προκαλούν επίσης την ανύψωση υγρών διαλυμάτων στα δέντρα.

Πρόβλημα 8

Υπολογίστε τη μανομετρική πίεση στο εσωτερικό μιας σαπουνόφουσκας διαμέτρου (α) 0.2cm και (β) 5cm στους 20^{o}C.

Λύση

Υποθέσεις: Η σαπουνόφουσκα βρίσκεται στον ατμοσφαιρικό αέρα.

Ιδιότητες: Η επιφανειακή τάση του νερο-σάπουνου στους 20°C είναι σ_s = 0.025 N/m.

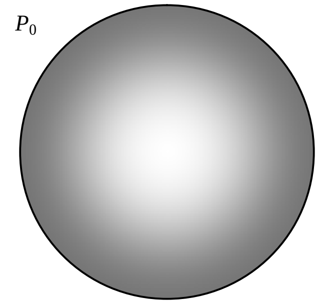
Ανάλυση: Η διαφορά πίεσης μεταξύ του εσωτερικού και του εξωτερικού χώρου της σαπουνόφουσκας δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta P_{\text{bubble}} = P_i - P_0 = \frac{4\sigma_s}{R}$$

Στην ατμόσφαιρα $P_0 = P_{atm}$, έτσι η ΔP_{bubble} ισοδυναμεί με τη μανομετρική πίεση. Αντικαθιστώντας,

$$P_{i,gage} = \Delta P_{\text{bubble}} = \frac{4(0.025 \text{ N/m})}{0.002/2 \text{ m}} = 100 \text{ N/m}^2 = 100 \text{ Pa}$$

$$P_{i,gage} = \Delta P_{\text{bubble}} = \frac{4(0.025 \text{ N/m})}{0.05/2 \text{ m}} = 4 \text{ N/m}^2 = 4 \text{ Pa}$$



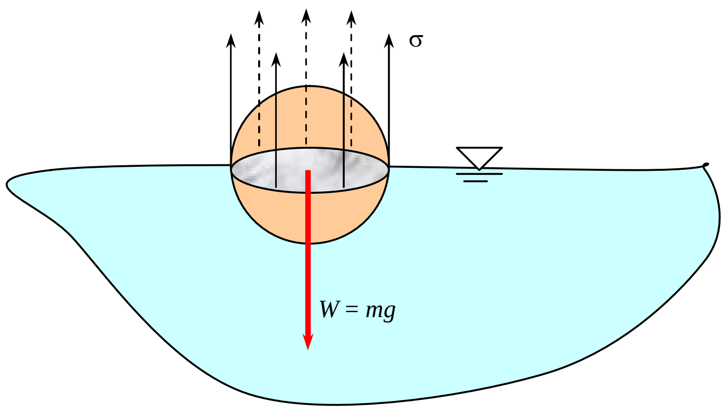
Ας σημειωθεί ότι η μανομετρική πίεση στη σαπουνόφουσκα είναι αντιστρόφως ανάλογη της ακτίνας της. Από το οποίο προκύπτει ότι η υπερπίεση είναι μεγαλύτερη στις μικρότερες σαπουνόφουσκες.

Πρόβλημα 9
Αντίθετα μ' αυτό που θα περίμενε κανείς, μια σιδερένια μπάλα μπορεί να επιπλέει στο νερό λόγω του φαινομένου της επιφανειακής τάσης. Υπολογίστε τη μέγιστη διάμετρο μιας σιδερένιας μπάλας που θα επέπλεε στο νερό στους 20 ^oC. Ποια θα ήταν η απάντησή σας για μια μπάλα αλουμινίου; Θεωρήστε ότι οι πυκνότητες των σφαιρών σιδήρου και αλουμινίου είναι 7800 kg /m^3 και 2700 kg/m^3, αντίστοιχα.

Λύση

Υποθέσεις: Το νερό είναι καθαρό και η θερμοκρασία του σταθερή. Η μπάλα τοποθετείται στο νερό προσεκτικά έτσι ώστε οι δυνάμεις αδράνειας να είναι αμελητέες. Η γωνία επαφής είναι 0^o για μέγιστη διάμετρο.

Ιδιότητες: Η επιφανειακή τάση του νερού στους 20°C είναι σ_s = 0.073 N/m. Η γωνία επαφής είναι 0°. Οι πυκνότητες σιδήρου και αλουμινίου είναι: ρ_{steel} = 7800 kg/m^3 και ρ_{Al} = 2700 kg/m^3.



Ανάλυση: Η δύναμη λόγω της επιφανειακής τάσης και το βάρος της μπάλας μπορούν να εκφραστούν ως ακολούθως:

$$F_s = \pi D \sigma_s \quad \text{και} \quad W = mg = \rho g V = \rho g \pi D^3 / 6$$

Όταν η μπάλα επιπλέει, η συνισταμένη δύναμη που ενεργεί πάνω στη μπάλα στην κατακόρυφη διεύθυνση είναι μηδέν. Ωστόσο, θέτοντας $F_s = W$ και λύνοντας ως προς τη διάμετρο D, έχουμε:

$$D = \sqrt{\frac{6\sigma_s}{\rho g}}$$

Αντικαθιστώντας τα γνωστά μεγέθη, οι μέγιστες διάμετροι για τις μπάλες σιδήρου και αλουμινίου είναι:

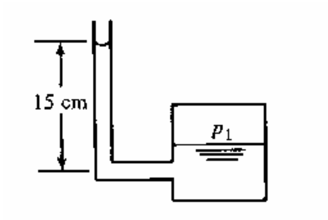
$$D_{steel} = \sqrt{\frac{6\sigma_s}{\rho g}} = \sqrt{\frac{6(0.073\ \text{N/m})}{(7800\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)}\left(\frac{1\,\text{kg}\cdot\text{m/s}^2}{1\,\text{N}}\right)} = 2.4\times10^{-3}\ \text{m} = 2.4\,\text{mm}$$

$$D_{alu\min um} = \sqrt{\frac{6\sigma_s}{\rho g}} = \sqrt{\frac{6(0.073\ \text{N/m})}{(2700\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)}\left(\frac{1\,\text{kg}\cdot\text{m/s}^2}{1\,\text{N}}\right)} = 4.1\times10^{-3}\ \text{m} = 4.1\,\text{mm}$$

Σχόλια: Ας σημειωθεί ότι η διάμετρος της μπάλας είναι αντιστρόφως ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας της πυκνότητας, και έτσι για δεδομένο υλικό, οι μικρότερες μπάλες είναι πιθανότερο να επιπλεύσουν.

Πρόβλημα 10

Ο γυάλινος σωλήνας του παρακάτω Σχήματος χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της πίεσης p_1 στο δοχείο νερού. Ο σωλήνας έχει διάμετρο 1 mm και το νερό θερμοκρασία 30°C. Μετά τη διόρθωση λόγω της επίδρασης της επιφανειακής τάσης, ποιο είναι το πραγματικό ύψος του νερού στο σωλήνα; Ποιο είναι το ποσοστό σφάλματος χωρίς διόρθωση;



Πρόβλημα 11

Μια σφαιρική σαπουνόφουσκα διαμέτρου d_1 συγχωνεύεται με μια άλλη διαμέτρου d_2 για να δημιουργήσει μια τρίτη διαμέτρου d_3 που περιέχει τον αέρα των δύο.

Υποθέτοντας ότι η διαδικασία είναι ισόθερμη, βρείτε d_3 συναρτήσει των d_1, d_2, της ατμοσφαιρικής πίεσης και της επιφανειακής τάσης σ.